COURS DE TOPOLOGIE GENERALE

LICENCE DE MATHEMATIQUES

PROFESSEUR DJIBY SOW

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Veuillez signaler toute anomalie ou suggestion à sowdjibab@ucad.sn, sowdjibab@yahoo.fr, Tel : 00221 77 184 74 79

Table des matières

Bibliographie

1. Faisant A. (1987) TP et TD de Toplogie Générale, Hermann
2. Dixmier J. (1981) Topologie Générale, Presse Université de France.
3. Fulton W. (1995) Algebraic topology, a frst course, Grad. Texts in Math., vol. 153, Springer-Verlag, New York,
4. Bourbaki N. (1990) Topologie Générale, Masson.
5. Choquet G. (1992) Cours de Topologie, Masson.
6. Rudin W. (1991) Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York,
7. Conway J. (2003) A course in functional analysis, second edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag
8. Massey. W.S. (1977). Algebraic topology : an introduction. (2nd edition) Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer-Verlag
9. Revuz D. : (1997) Mesure et intégration, Hermann,
10. Schwartz L. (1980) Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Hermann.
11. TWGamelin and RE Greene. (1999) Introduction to Topology. 2nd ed. Dover Publications, .
12. May. J P (1999) A Concise Course in Algebraic Topology. University of Chicago Press,
13. Schapira P. (2010/2011 (v.3)) General Topology Course at Paris VI University, (online)
14. Korner T. W. (August 23, 2012) Course "Metric and Topological Spaces" (online)
15. Wilkins D. R. (1997-2006) Course "General Topology" (online)
16. Nier F., Iftmie D. Cours "Introduction à la Topologie" Licence de Mathématiques Université de Rennes 1 (en ligne)
17. Chebli H. Lassoued L. (Mai 2009) Cours de Topologie, Université Virtuelle de Tunis (en ligne)

18. Paulin F. (Année 2008-2009) "Topologie, analyse et calcul différentiel" Cours de troisième année de licence Ecole Normale Supérieure. (en ligne)

19. Berger C. (2004) Topologie pour la licence , cours et exercices.Université de Nice-Sophia Antipolis.(en ligne)

20. Zekri. R. (Année 2010/2011). "Cours de Topologie, Master 1" (en ligne)

21. Guillot P. (décembre 2012)"Cours 'Topologie algébrique" (en ligne)

Rappels

Soient A et B deux ensembles quelconques non vides et $f : A \longrightarrow B$ une application. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles de parties de A et B respectivement, $U \subseteq A$, $V \subseteq B$. Alors on a :

1. Si $A_1 \subseteq A_2$ alors $f(A_1) \subseteq f(A_2)$
2. Si $B_1 \subseteq B_2$ alors $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
3. $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$
4. $f(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I} f(A_i)$
5. $f^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$
6. $f^{-1}(\cap_{j\in J} A_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$
7. $f^{-1}(V^c) = [f^{-1}(V)]^c$
8. $U \subseteq f^{-1}(f(U))$
9. $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$

Plusieurs preuves d'exercices, de théorèmes, de propositions, de lemmes et de corrollaires ne sont pas détaillés dans ce fascicule de toplogie générale. Le lecteur est invité à

— suivre le cours magistral de l'auteur,

— ou, et à visiter la bibliographie ci-dessus citée par l'auteur,

— et a réfléchir profondément sur les affirmations,

pour connaître la justification des résultats.

Chapitre 1

Introduction aux espaces métriques

Les notions de norme, distance, ouvert, fermé sont déjà rencontrés dans le cours de L1MPI sur la topologie dans $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$.
Dans ce chapitre, on généralise ces concepts aux espaces métriques (c'est-à-dire un ensemble non vide munie d'une distance).

1.1 Distances et Normes

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X, toute application $d : X \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant, $\forall\ x\ y\ z \in X$:*

$(D1)$ $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow\ x = y$

$(D2)$ $d(x, y) = d(y, x)$

$(D3)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Inégalité triangulaire)*

Exercice 1.1.1. *Soit d une distance sur X.*

a) Montrer que $d(x, y) \geq 0$, $\forall\ x,\ y \in X$.

b) Montrer que $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

□

Exemple 1.1.1. .

1. *Montrer que l'application*

$$\begin{aligned} d_1 : \quad [0,+\infty[\times[0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d_1(x,y) = |x^2 - y^2| \end{aligned}$$

est une distance sur $[0,+\infty[$.

2. *Montrer que l'application*

$$\begin{aligned} d_2 : \quad]0,+\infty[\times]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d_2(x,y) = |\ln x - \ln y| \end{aligned}$$

est une distance sur $]0,+\infty[$.

Définition 1.1.2. *Une norme sur un espace vectoriel* E *sur* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *est une application notée* N *ou* $||.||$ *définie par*

$$\begin{aligned} N : \quad E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto N(x) = ||x|| \end{aligned}$$

et vérifiant, $\forall x,\ y \in E$ *et* $\forall \alpha \in K$

$(N1)$ $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$

$(N2)$ $||x|| = 0 \Longrightarrow x = 0$

$(N3)$ $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Exercice 1.1.2. *Soit* $||.||$ *une norme sur un espace vectoriel* E *sur* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$,.

a) Montrer que $||0|| = 0$.

b) Montrer que $||x|| \geq 0$, $\forall\ x \in E$.

Définition 1.1.3. ***Espace métrique et Espace vectoriel normé***

1. *Un espace métrique est un couple* $(X,\ d)$ *où* X *est un ensemble non vide et* d *est un distance sur* X.

2. *Un espace vectoriel normé sur* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est un couple* $(E,\ ||.||)$ *où* E *est un espace vectoriel sur* K *et* $||.||$ *est une norme sur* E.

Exemple 1.1.2. .

1. *Soit $\mathbb{R}$ alors $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

   L'application $x \longmapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ et l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, x') \longmapsto d(x, x') = |x - x'|$ est une distance sur E. Ainsi $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace vectoriel normé et $(\mathbb{R}, d)$ est un espace métrique.

2. *Soit $E = \mathbb{C}$ alors E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

   L'application $z = a + ib \longmapsto ||z|| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est une norme sur E et l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} : (z, z') \longmapsto d(z, z') = ||z - z'||$ est une distance sur E. Ainsi $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé et (E, d) est un espace métrique.

3. *Soit $\mathfrak{D} = \{a + \varepsilon b / \varepsilon^2 = 0, \quad a, \ b \in \mathbb{R}\}$*

   a) Montrer que $\mathfrak{D}$ est un esace vectoriel sur $\mathbb{R}$;

   b) Est-ce-que les applications $||.||_1 : z = a + \varepsilon b \longmapsto ||z||_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $||.||_2 : z = a + \varepsilon b \longmapsto ||z||_2 = \sqrt{a^2} = |a|$ sont des normes sur $\mathfrak{D}$?

1.2 Boules et Sphères

Définition 1.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}$.*

1. *On appelle boule ouverte ou ouvert élémentaire de centre x et de rayon r, l' ensemble $B_0^X(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}$. S'il y'a pas d'ambiguité, on note $B_0(x, r)$ au lieu de $B_0^X(x, r)$.*
2. *On appelle boule fermée de centre x et de rayon r, l'ensemble $B_f^X(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\}$. S'il y'a pas d'ambiguité, on note $B_f(x, r)$ au lieu de $B_f^X(x, r)$.*
3. *On appelle sphère de centre x et de rayon r, l'ensemble $S(x, r) = \{y \in X, d(x, y) = r\}$.*

Définition 1.2.2. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée, s'il existe une boule fermée $B_f(x_0, r)$ telle que $A \subseteq B_f(x_0, r)$*
$\Longleftrightarrow d(x, x_0) \leq r \ \forall \ x \in A$.

Exemple 1.2.1. 1. *On équipe $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. Les ensembles $C_1 = [-3, 3[\cup]4, 11[\cup\{31\}$ et $D_1 =]12, 17[$ sont bornés dans R alors que les ensembles $C_2 =]-3, 11[\cup\{20\}\cup]21, +\infty, [$ et $D_2 = \left\{\frac{(-1)^n + n^2 + 3n}{1 + n\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}\right\}$ ne sont pas bornés dans $\mathbb{R}$.*

2. *On équipe $\mathbb{C}$ de la distance usuelle. Tout disque (sphère) de $\mathbb{C}$ est borné. L'ensemble $A = \{\left(\frac{3-4i}{5}\right)^n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$ alors que l'ensemble $B = \left\{\left(2+i\right)^n, n \in \mathbb{N}\right\}$ n'est pas borné dans $\mathbb{C}$.*

Définition 1.2.3. ***Diamètre***

- *Soit (X, d) un espace métrique. Soient A et B deux parties non vide de X. On appelle distance entre A et B la valeur $d(A, B) = \inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\}$.*
- *On appelle diamètre d'une partie A non vide de X, notée* $\operatorname{diam}(A)$, *la valeur* $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y),\ x \in A,\ y \in A\}$.

Exercice 1.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Montrer que $A \subset X$ est borné si et seulement si diam(A) est fini.*
2. *On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. Soit $A = \{-1\}$ et $B = \{\frac{n}{1-n},\ n \geq 2\}$. Montrer que $d(A, B) = 0$. En déduire que d n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.*

1.3 Ouverts et fermés d'un espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 1.3.1. 1. *Une partie θ de X est dit ouverte si $\forall\ \ x \in \theta$, il existe une boule ouverte $B_0(x, r)$ de centre x et de rayon r telle $B_0(x, r) \subseteq \theta$. Les ensembles $\emptyset$ et X sont des ouverts.*

2. *Une partie F de X est dit fermée si son complémentaire F^c est une partie ouverte. Les ensembles $\emptyset$ et X sont des fermés.*

Proposition 1.3.1. *Soit (X, d) un espace métrique .*

1. *Toute boule ouverte est un ouvert.*
2. *Tout ouvert θ de X est réunion de boules ouvertes.*
3. *Toute boule fermée est fermée.*

Preuve

1. Soit $B_0(x_0, r_0)$ une boule ouverte avec $r_0 > 0$. Soit $x \in B_0(x_0, r_0)$. On pose $r' = \frac{r_0 - d(x,x_0)}{2} > 0$ car $B_0(x_0, r_0)$ est ouvert, alors $B_0(x, r') \subseteq B_0(x_0, r_0)$. En effet, si $y \in B_0(x, r')$, alors $d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r' = d(x_0, x) + \frac{r_0 - d(x_0,x)}{2} = \frac{r_0 + d(x_0,x)}{2} < r_0$.

2. Soit θ un ouvert. Si $x \in \theta$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_0(x, r_x) \subseteq \Theta$. Alors $\theta = \cup_{x\in\theta} B_0(x, r_x)$.

3. Soit $B_f(x_0, r_0)$ une boule fermée avec $r_0 \geq 0$. Montrons que $B_f(x_0, r_0)^c$ est un ouvert. Soit $x \in B_f^c(x_0, r_0)$ alors $d(x_0, x) > r_0 \geq 0$. On pose $r'' = \frac{d(x_0,x) - r_0}{2}$, alors $B_0(x, r'') \subseteq B_f^c(x_0, r_0)$. En effet : soit $y \in B_0(x, r'')$, on a
$d(x_0, x) - d(x_0, y) \leq |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq d(x, y) < r'' = \frac{d(x_0,x) - r_0}{2}$. D'où, $d(x_0, y) > -(\frac{d(x_0,x) - r_0}{2}) + d(x_0, x) = \frac{d(x_0,x) + r_0}{2} \geq r_0$. Par suite $d(x_0, y) > r_0$.

□

Théorème 1.3.2. ***(Propriétés des ouverts)***

Soit (X, d) un espace métrique, alors on a :

1. *X et $\emptyset$ sont des ouverts.*

2. *Si $(\theta_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors $\cup_{\alpha\in I}\theta_\alpha$ est un ouvert ;*

3. *Si $(\theta_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie d'ouverts, alors $\cap_{1\leq i\leq n}\theta_i$ est un ouvert.*

Remarque 1.3.1. *Une intersection quelconque d'ouverts n' est pas forcément un ouvert. Par exemple $\bigcap_{n\geq 1}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[= \{x\}$ est un fermé dans $\mathbb{R}$ muni de la norme usuelle.*

Théorème 1.3.3. ***(Propriétés des fermés)***

Soit (X, d) un espace métrique, alors :

1. *X et $\emptyset$ sont des fermés ;*

2. *Soit $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de fermés, alors $\cap_{\alpha\in I}F_\alpha$ est un fermé ;*

3. *Soit $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de fermés, alors $\cup_{1\leq i\leq n}F_i$ est un fermé.*

Remarque 1.3.2. *Une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé. Par exemple $\bigcap_{n\geq 1}]1 + \frac{1}{3n}, 2 - \frac{1}{3n}[=]1, 2[$.*

Définition 1.3.2. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Soit* $x \in X$. *On dit que* $V \subseteq X$ *est un voisinage de* x *s'il existe* $B_0(x, r) \subseteq V$.

Lemme 1.3.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique;* θ *est un ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.*

Preuve Simple □

Définition 1.3.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique.*

1. *Si* V_x *est un voisinage* x*, alors* $V_x = V_x \backslash \{x\}$ *est appelé voisinage pointé de* x_0.
2. *Toute boule ouverte* $B_0(x, r)$ *de centre* x *est un voisinage de* x *et tout voisinage* V_x *de* x *contient une boule ouverte de centre* x. *On dit que l'ensemble des boules ouvertes de centre* x *est un système fondamentale de voisinage (SFV) de* x.

Exemple 1.3.1. .

— *Dans* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle,* $V_1 =]-\infty, -2] \cup [4, 7[$ *est un voisinage de* -5 *et* $6,9999$ *mais pas de* $-2, 1$ *et* 7 *;*

— *Dans* $\mathbb{C}$ *muni de la distance euclidienne,* $z = a + ib \longmapsto \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.
$V_2 = \big\{z = a + ib/(x, y) \in]-2, 1] \times [0, 3[\cup \{3\} \times]-1, 1[\big\}$ *est un voisinage de* $z_0 = 1,5 + i$ *mais pas de* $z_1 = 1 + 2i$ *et* $z_2 = 3 - \frac{i}{2}$.

— *Dans* $\mathbb{C}$ *muni de la distance euclidienne,* $V_2 = \big\{z = a + ib/(x, y) \in]-2, 0] \times [-2, 1[\cup]-2, 2[\times \{3\}\big\}$ *est un voisinage de* $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ *mais pas de* $z_1 = 2i$ *et* $z_2 = 1 - 3i$.
$V_4 = \big\{z \in \mathbb{C}/2 < |z| < 3\big\}$ *est un ouvert,* $V_5 = \big\{z \in \mathbb{C}/2 < |z| \leq 3\big\}$ *ne l'est pas.*

1.4 Adhérences et Suites dans un espace métrique

Définition 1.4.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* X. *On dit que* $(x_n)_n$ *converge dans* X*, s'il existe* $x \in X$ *tel que*

$\star$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon / \forall\ n \in \mathbb{N}, \big(n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow d(x, x_n) < \varepsilon\big)$

$\star\star$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon / \forall n \in \mathbb{N}\big(n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow x_n \in B_o(x, \varepsilon)\big)$

Exemple 1.4.1. *Dans* $\mathbb{C}$*, muni de la distance euclidienne usuelle, les suites données par* $z_n = (\frac{1+i}{3})^n$ *et* $z_n = \frac{-ni}{2n+1}$ *converge respectivement vers* 0 *et* $-\frac{i}{2}$.

Lemme 1.4.1. *(de **séparation**) Soit (X,d) un espace métrique. Si $x \neq x'$ dans X alors il existe $r,\ r' > 0$ tes que $B_0(x,r) \cap B_0(x',r') = \emptyset$.*

Preuve Simple □

Remarque 1.4.1. *On dit que cet **espace m''etrique est séparé** car deux éléments distincts peuvent être séparés par deux ouverts disjoints. Noter qu'il existe d'autres notions de séparation (voir chap 4).*

Lemme 1.4.2. *Dans un espace métrique (X,d), si une suite $(x_n)_n$ admet une limite alors elle est unique.*

Preuve Soient x, x' deux limites distinctes de $(x_n)_n$. Comme (X,d) est séparé, alors il existe $r,\ r' > 0$ tes que $B_0(x,\varepsilon) \cap B_0(x',\varepsilon') = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe N_ε et N'_ε tels que

- $n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow x_n \in B_0(x,\varepsilon)$
- $n \geq N'_\varepsilon \Longrightarrow x_n \in B_0(x,\varepsilon)'$

donc pour $n \geq max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$, on a $x_n \in B_0(x,\varepsilon) \cap B_0(x,\varepsilon)'$. Ce qui est absurde.

□

Définition 1.4.2. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit $A \subseteq X$ non vide. L'adhérence de A noté $\overline{A}$, est le plus petit fermé contenant A.*

Proposition 1.4.3. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit $A \subseteq X$ non vide. Alors, on a :*

1. *$\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de X contenant A.*
2. *$\overline{A}$ est un fermé contenant A.*
3. *A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Preuve : Trivial □

Proposition 1.4.4. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit $A \subseteq X$ non vide.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$x \in \overline{A}$*
2. *$\forall\ V_x$, voisinage de x, $V_x \cap A \neq \emptyset$*

3. il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x.

□

Définition 1.4.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subseteq X$ non vide. Un élément $x \in X$ est dit point d'accumulation de A si pour tout voisinage V_x de x, on a : $\big(V_x \setminus \{x\}\big)A \neq \emptyset$.*

Théorème 1.4.5. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subseteq X$ non vide.*

Un point z_0 est un point d'accumulation de $A \in E$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_n$ de termes deux à deux distincts et vérifiant $a_n \in A \setminus \{z_0\}$, $\forall n \geq 1$, telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = z_0$.

Preuve

$\Rightarrow$) Supposons z_0 est un point d'accumulation, alors tout boule centre z_0 contient un point qui n'est pas z_0. On va appliquer cette propriété pluisieurs fois pour construire la suite recherchée.

- Soit $n_1 = 1$, alors $B_0(z_0, \frac{1}{n_1}) \cap A$ contient au moins un point a_1 avec $a_1 \notin \{z_0\}$.

- Soit $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n_2 > \max\left\{2, n_1, \frac{1}{d(a_1, z_0)}\right\}$ alors $B_0(z_0, \frac{1}{n_2}) \cap A$ contient au moins un point a_2 avec $a_2 \notin \{z_0, a_1\}$.

- Suposons $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ construitent. Soit $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k > \max\left\{k, n_{k-1}, \frac{1}{d(a_{k-1}, a_0)}\right\}$ alors $B_0(z_0, \frac{1}{n_k}) \cap A$ contient au moins un point a_k avec $a_k \notin \{z_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$.

Comme $d(a_k, z_0) \leq \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}, \forall k \geq 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_k = z_0$ et de plus tous les termes de la suite sont deux à deux distincts entre eux et sont aussi distincts de z_0.

$\Leftarrow$) Réciproquement, soit V_{z_0} un voisinage de z_0, alors il existe ε tel que $B_0(z_0, \varepsilon) \subset V$. Mais par hyphothèse pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon / \forall n, n > N_\varepsilon \Rightarrow a_n \in B_0(z_0, \varepsilon) \subset V$ avec $a_n \notin \{z_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, donc V contient une infinité de termes de la suite $(a_n)_n$. Ansi, z_0 est un point d'accumulation de $\{a_n, n \in N\} \subseteq A$, donc pour A aussi en particulier.

□

Maintenant, pour un ensemble constitué de l'ensemble des termes d'une suite, définissons le concept "intermédaire" appelé "valeur d'adhérence".

Définition 1.4.4. ***(Proposition)*** *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $l \in X$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ d' éléments de X s'il existe une sous suite de $(x_n)_n$ qui*

converge vers l.
L'ensemble des valeurs d'adhérences est $\bigcap_{k>0} \overline{\{x_n/n \geq k\}}$.

Proposition 1.4.6. *Soit (X,d) un espace métrique. $l \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_0(l,\varepsilon)\}$ est infini.*

Preuve

1. Supposons que l est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$. Il existe alors une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow x_{\varphi(n)} \in B_o(l,\varepsilon)$.
   On a donc l'inclusion $\{\varphi(n)/n \geq n_0\} \subset \{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(l,\varepsilon)\}$. Comme $\{\varphi(n)/n \geq n_0\}$ est infini (car φ est croissante par définition des suites extraites et $\varphi(n) \geq n$), alors $\{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_o(l,\varepsilon)\}$ est infini.
2. Supposons que $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}/x_n \in B_0(l,\varepsilon)\}$ est infini. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{p_0} \in B_o(l,1)$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $p_1 > p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{p_1} \in B_o(l,\frac{1}{2})$. Par recurrence, pour $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$, il existe $p_k > p_{k-1} \in \mathbb{N}$ tel que $x_{p_k} \in B_o(l,\frac{1}{k+1})$. L'application $\varphi : k \in \mathbb{N} \mapsto \varphi(k) = p_k$ est croissante et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(k)} \in B_o(l,\frac{1}{k+1})\}$. La suite $(x_{\varphi(k)})_k$, ainsi construite est une suite extraite de $(x_n)_n$ qui converge vers l.

□

Proposition 1.4.7. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit F une partie de X non vide. Alors F est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ dans F convergente vers $x \in X$, on a bien $x \in F$.*

Preuve Découle du fait que F est fermé ssi $F = \overline{F}$, et de la caractérisation des points adhérents par les suites. □

Définition 1.4.5. *Soit (X,d) une espace métrique alors D est dense dans X si $\overline{D} = X$.*

Le concept de densité est tres itule en analyse. Très souvent, conniassant des propriétés sur une partie dense D de X on cherche à étendre ces propriétés sur X tout entier. (Voir le théorème de prolongment des applications continues du chap 2, entre autres).

Exemple 1.4.2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

1.5 Normes et distances équivalentes

1.5.1 Produits scalaires et Normes

Définition 1.5.1. ***Produit Scalaire sur*** $\mathbb{R}$

Soit E un espace vectoriel réeel.

On dit que $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est un produit scalaire sur E si :

1. $\langle \alpha u + \beta v, y\rangle = \alpha\langle u, y\rangle + \beta\langle v, y\rangle$ *et* $\langle x, \alpha' u' + \beta' v'\rangle = \alpha'\langle x, u'\rangle + \beta'\langle x, v'\rangle$ *(bilinéaire).*
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ *(symétrique)*
3. $\forall x \in E \quad \langle x, x\rangle \geq 0$ *(positive)*
4. $\forall x \in E \quad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(définie, non dégénéré).*

Un **produit scalaire** sur E est une **forme bilinéaire symétrique définie positive** sur $E \times E$. Un espace vectoriel réel de dimension finie muni dún produit scalaire est appelé **espace euclidien**.

Tout produit scalaire permet de définir une norme.

Proposition 1.5.1. .

Considérons l'application $||, || : E \to \mathbb{R} : x \mapsto ||x|| = (\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}}$. Alors on a :

1. $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$
2. $||\lambda x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $||x + y|| = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$
4. $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz) ;*
5. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(inégalité triangulaire) ;*
6. $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x + y||^2 + ||x - y||^2$ *(identité de la médiane).*

Définition 1.5.2. ***Produit Scalaire Hermitien (sur*** $\mathbb{C}$***)***

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

On appelle produit scalaire hermitien sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Autrement dit que $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ *est un produit scalaire hermitien sur* E *si :*

1. *C'est une application sesquilinéaire, c'est-à-dire :* $\langle \alpha u + \beta v, y\rangle = \alpha\langle u,y\rangle + \beta\langle v,y\rangle$ *et* $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ *où* $\overline{z}$ *signifie le conjugué du nombre complexe* z.
2. $\forall x \in E \ \ \langle x,x\rangle \geq 0$ *(positive)*
3. $\forall x \in E \ \ \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(définie).*

1.5.2 Equivalences

Définition 1.5.3. *Deux normes* $||.||_1$ *et* $||.||_2$ *sur un espace vectoriel* E *sont dites équivalentes, s'il existe des constantes* α, β *telles que* $\alpha||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \beta||x||_2 \ \forall \ x \in E$.
Deux distances d_1 *et* d_2 *sur un espace métriques* X *sont dites équivalentes, s'il existe des constantes* α, β *telles que* $\alpha d_1(xy) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_2(x,y) \ \forall (x,y) \in X^2$.

Remarque 1.5.1. *Soit* E *un espace vectoriel normé. La propriété "*$||.||_1$ *et* $||.||_2$ *sont équivalentes" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur* E. *De même si* X *est un espace métrique la relation définie sur l'ensemble des distances sur* E *: "*d_1 *et* d_2 *sont équivalentes" est une relation déquivalence, on note* $d_1 \sim d_2$.

Proposition 1.5.2. *(Normes usuelles)*

1. *Si* $E = \mathbb{R}^n$ *ou un espace vectoriel de dimension* n *sur* $\mathbb{R}$, *on a les normes suivantes : soit* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ *ou* $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) \in E$ *où* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de* E.

   $$||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \, ; \quad ||x||_2 = (\sum_{i=i}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} \, ; \ \ ||x||_\infty = max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

   La norme $||.||_2$ *est dite norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$ *car elle découle du produit scalaire* $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ *si* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_n)$. *Ces trois nprmes sont équivalentes et on a :*

   $$||x|_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$$

2. *Soit* $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions continues de* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Pour* $f, \ g \in E$, *on définit un produit scalaire*
   $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$. *On a les 3 normes*

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$$
$$||f||_2 = (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \text{ (norme euclidienne)}$$
$$||f||_\infty = sup_{a \leq x \leq b} |f(t)| \text{ (norme de la convergence uniforme).}$$

Les normes $||.||_1$ *et* $||.||_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*

3. *Si* $(E_1, N_1), \ldots, (E_n, N_n)$ *sont* n *espaces vectoriels normés alors on a* 3 *normes* $M_i, 1 \leq i \leq 3$ *sur* $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ *données par : pour* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$

$$M_1(x) = \sum_{i=1}^n N_1(x_i)\,; \quad M_2(x) = (\sum_{i=i}^n N_i(x_i)^2)^{\frac{1}{2}}\,;$$
$$M_\infty(x) = \max\left\{N_1(x_1), \ldots, N_n(x_n)\right\}$$

qui sont équivalentes sur E.

Remarque 1.5.2. *Plus loin on va montrer que deux normes quelconques sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

1.6 Produit fini d'espaces métriques

Proposition 1.6.1. ***(Distances sur l'espace produit)***

Soient $(E_1, d_1), (E_2, d_2), \ldots, (E_n, d_n)$ *des espaces metriques et* $E = E_1 \times E_2 \times, \ldots \times E_n$ *l'espace produit. Alors les trois distances, données par : pour* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$

$$D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_1(x_i, y_i)\,; \quad D_2(x, y) = \left(\sum_{i=i}^n d_i(x_i, y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\,;$$
$$D_\infty(x, y) = \max\left\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\right\}$$

sont équivalentes sur E.

Preuve A faire $\square$

Définition 1.6.1. ***(Proposition)***

Soient $(E_1, d_1), (E_2, d_2), \ldots, (E_n, d_n)$ *des espaces metriques et alors* $E = E_1 \times E_2 \times, \ldots \times E_n$ *munit de l'une des distances équivalentes de la définition ci-dessus, est appelé l'espace métrique produit.*

Les ensembles de la forme $\theta = \theta_1 \times \theta_2 \times \dots \theta_n$ où θ_i est un ouvert de E_i, sont appelés des ouverts élémentaires, de plus ils constituent un systeme fondamental d'ouverts de $E = E_1 \times E_2 \times, \dots \times E_n$

Exemple 1.6.1. .

1. *On suppose que $\mathbb{R}$ est munit de la distance usuelle. On considère l'espace métrique produit induit : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munit de l'une des trois distances équivalentes ci-dessus. Alors $]-3,5[\times]1,4[$ et $]-\infty,-1[\times(]-1,1[\cup]2,3[)$ sont des ouverts. Mais $]-3,5[\times\{1\}$, nest pas un ouvert.*
2. *On suppose que $R_1 = \mathbb{R}$ est munit de la distance usuelle et $R_2 = \mathbb{R}$ est munit de la distance discrète. On considère l'espace métrique produit induit : $R_1 \times R_2$ munit de l'une des trois distances équivalentes ci-dessus. Alors $]-3,5[\times\{1\}$ et $]-\infty,-1[\times(\{-1\}\cup]0,1[)$ sont des ouverts. Mais $\{-3\}\times]1,4[$ n'est pas un ouvert.*

1.7 Sous-espaces métriques

Définition 1.7.1. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit $X' \subseteq X$, $X' \neq \emptyset$, alors X' peut être minu d'une distance d' telle que $d'(x,y) = d(x,y)$ $\forall$ x, $y \in X'$ On dit que (X,d') est un sous-espace métrique de (X,d). d' est appelée distance induite par d sur X.*

1. *$B_0^{X'}(x,r) = \{y \in X'/d'(x,y) = d(x,y) < r\} = X' \cap B_0^X(x,r)$. Ainsi les boules ouvertes de X' sont les intersections avec X' (traces) des boules ouvertes de X.*
2. *De même, les ouverts de X' sont les traces des ouverts de X c-a-d $\theta' \subseteq X'$ est un ouvert de X' si et seulement si $\theta' = \theta \cap X'$ où θ est un ouvert de X.*

Exemple 1.7.1. .

1. *On considère que $X = \mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle. On pose $X' = [2,4[\cup\{7\}$.*
   (a) *$\theta_1 = \{7\} =]6,8[\cap X'$ donc $\theta_1 = \{7\}$ est un ouvert de X' bien que $\theta_1 = \{7\}$ ne soit pas un ouvert de $X = \mathbb{R}$.*
   (b) *$\theta_2 = [2,4[=]1,4[\cap X'$ donc $\theta_2 = [2,4[$ est un ouvert de X' bien que θ_2 ne soit pas un ouvert de $X = \mathbb{R}$.*

2. *On considère que $X = \mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle.*

   On pose $Z = \{-2, 0, 3\}$

   (a) *Determiner les ouverts et les fermés de Z avec la distance induite de $\mathbb{R}$*

   (b) *On définit la distance discrète (= triviale) δ sur Z. Determiner les ouverts et les ferés de (Z, δ). Comparer avec (a).*

1.8 Continuité

Rappels

$\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta_\varepsilon > 0 / \forall x \in \mathbb{R}\ \big(|x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big)$

Définition 1.8.1. *(Cas général des espaces métriques) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques $f : X \longrightarrow Y$ une application f continue en un point $x_0 \in X$ si*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 / \forall x \in X \big(d_X(x - x_0) < \eta_\varepsilon \Longrightarrow d_Y(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon\big)$

$\Longleftrightarrow \forall B_0^Y(f(x_0), \varepsilon), \exists B_0^X(x_0, \eta_\varepsilon) / f(B_0^X(x_0, \eta_\varepsilon) \subseteq B_0^Y(f(x_0, \varepsilon).$

Théorème 1.8.1. *(de caractérisation) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue si et seulement si $f^{-1}(V)$ est un ouvert de (X, d_X) pour tout ouvert V de (Y, d_Y).*

Corollaire 1.8.2. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $f : X \to Y$ une application. Alors f est continue si et seulement si $f^{-1}(F)$ est un fermé de (X, d_X) pour tout fermé F de (Y, d_Y).*

Exemple 1.8.1. *On pose et d_t distance discrète (= triviale), et d_u = distance usuelle.*

1. *Soit $f : (\mathbb{R}, d_t) \to (\mathbb{R}, d_u) :\ x \mapsto f(x) = x$. Montrer que f est continue . Trouver 3 ouverts U_i, $1 \leq i \leq 3$ de $(\mathbb{R}, d_t)$ tels que $V_i = f(U_i)$ ne soit pas un ouvert de $(\mathbb{R}, d_u)$;*
2. *Soit $g : (\mathbb{R}, d_t) \to (\mathbb{R}, d_u)$; $y \mapsto g(y) = y$. Montrer que $g(V)$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, d_t)$ pour tout ouvert V de $(\mathbb{R}, d_u)$.*

Définition 1.8.2. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une application $h : X \longrightarrow Y$ est un* ***homéomorphisme*** *si h est une bijection telle que h et h^{-1} soient continues.*

Proposition 1.8.3. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques.*

Si $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme alors V est un ouvert de Y si et seulement si $h^{-1}(V)$ est un overt de X.

Exemple 1.8.2. *On note par d_u la distance usuelle et par d_t la discrète sur $\mathbb{R}$.*

1. *On considère que $X =]0, 1[$ et $Y =]1, +\infty[$. Alors $f : (X, d_u) \to (Y, d_u) : x \mapsto \frac{1}{x}$ est un homéomorphisme d'espaces métriques.*
2. *On considère que $X = \mathbb{R}$ et $Y =]-1, 1[$. Alors $f : (X, d_u) \to (Y, d_u) : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme d'espaces métriques.*
3. *Soit $f : (\mathbb{R}, d_t) \to (\mathbb{R}, d_u) : x \mapsto x$ alors f est bijective, continue mais $f^{-1} : (\mathbb{R}, d_u) \to (\mathbb{R}, d_t) : x \mapsto x$, n'est pas continue. Donc f n'est pas un homéomorphisme.*

Proposition 1.8.4. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue si et seulement si $\forall$ (x_n) une suite de X convergente vers $x \in X$, on a $(f(x_n))_n$ converge vers $y = f(x)$.*

Preuve 1.8.1. *A faire*

Exercice 1.8.1. *Montrer que l'application $f : X, d) \longrightarrow (Y, \delta)$ est continue si et seulement si $f(\overline{A} \subseteq \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$.*

Proposition 1.8.5. *Soient $(E_1, d_1), (E_2, d_2), \ldots, (E_n, d_n)$ des espaces metriques et $E = E_1 \times E_2 \times, \ldots \times E_n$ l'espace metrique produit.*

1. *La projection d'indice i, definie pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ par $p_i(x) = x_i$ est une application continue.*
2. *Une application $f : F \to E = E_1 \times E_2 \times, \ldots \times E_n$, (où F est un espace métrique) qui à $x \in F$ fait correspondre $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ est continue si, et seulement si, pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, la fonction $p_i \circ f$ est continue.*
3. *Soit $f : E = E_1 \times E_2 \times, \ldots \times E_n \to F$ (où F est un espace métrique) une application continue. $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Les applications partielles*
   $f_i(t) = f\big(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots a_n\big)$ sont continues de E_i dans F.

Preuve

1. Noter que si θ_i est un ouvert de E_i pour la distance d_i, alors $p_i^{-1}(\theta_i) = E_1 \times \ldots E_{i-1} \times \theta_i \times E_{i+1} \ldots \times E_n$ est un ouvert de E pour la distance produit.
2. A faire.
3. A faire.

$\square$

Exemple 1.8.3. *Dire si les ensembles suivants sont des ouverts ou des fermés de R^3.*

1. $\Theta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 < 9 \text{ et } z > 1\}$
2. $\Theta' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 < 9 \text{ ou } z > 1\}$.

Solution

1. *Les applications $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-2)^2$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (y-1)^2$ et $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto z^2 - 9$ sont continues. Puisque les projections $p_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : u = (u_1, u_2, u_3) \mapsto u_i$ sont continues, alors les applications $\overline{f_1} = f_1 \circ p_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto (x-2)^2$, $\overline{f_2} = f_2 \circ p_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto (y-1)^2$ et $\overline{f_3} = f_3 \circ p_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto z^2 - 9$ sont continues. Enfin l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto \overline{f_1}(x,y,z) + \overline{f_2}(x,y,z) + \overline{f_3}(x,y,z) = x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 9$ est continue ainsi $f^{-1}(]-\infty, 0[= \Theta_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 9 < 0\}$ est un ouvert. De même $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : z \mapsto z - 1$ est continue ainsi $g^{-1}(]0, +\infty[= \Theta_2 = \{z - 1 > 0\}$ est un ouvert. Par suite $\Theta = \Theta_1 \cap \Theta_2$ est un ouvert car étant une réunion de deux ouverts.*
2. *$\Theta' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 < 9 \text{ ou } z > 1\}$ est un ouvert car étant la réunion de deux ouverts.*

Définition 1.8.3. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite uniormément continue si $\forall$, $\varepsilon > 0$, $\exists\ r_\varepsilon$ tel que $\forall x, y \in E$ $\big(d(x,y) < r_\varepsilon \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$.*

Définition 1.8.4. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques et k un réel positif. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est k-lipscitienne si $\forall\ x, y \in X$, $\delta(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$. Lorsque $k < 1$, on dira que f est contractante.*

Proposition 1.8.6. *Une application k-lipschitienne est uniformément continue.*

Remarque 1.8.1. *(f k-lipschitzienne) $\Rightarrow$ (f uniformément continue) $\Rightarrow$ (f continue)*

Définition 1.8.5.
1. *On dit que f est bilipschitzienne si c'est une bijection telle que f et f^{-1} sont k-lipschitziennes.*
2. *On dit que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est une isométrie si pour tout $x, y \in X$ on a $d_Y\big(f(x), f(y)\big) = d_X(x, y)$. (Une isométrie est toujours injective. Si de plus, elle est surjective, alors elle est bilipschitzienne avec rapport 1 dans les deux sens.)*

Exemple 1.8.4. *Si F est un espace vectoriel normé de dimension finie n, alors on a une isomŕie bijective $\varphi : \big(F, ||.||_\infty^{(F)}\big) \to \big(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty^{(\mathbb{R}^n)}\big) : x = \sum_{k=1}^n \lambda_i e_i \mapsto y = \big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big)$ où $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ est une base de F, car $||\varphi(x)||_\infty^{(F)} = ||x||_\infty^{(\mathbb{R}^n)}$*

Théorème 1.8.7. *Soient (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces vectoriels normés, et $f : E \longrightarrow F$ une application lineaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur E ;*
2. *$\exists\, c > 0 \;/\; \forall\, x \in E,\ N_2(f(x)) \leq cN_1(x)$.*

Preuve

— 1) $\Longrightarrow$ 2) Supposons f est continue sur E, alors f est continue en 0, par suite pour $\varepsilon = 1$, il existe $r > 0$ tel que $N_1(z) < r \Longrightarrow N_2(f(z)) < 1$ car $f(0) = 0$.
Soit $x \in E, x \neq 0$, (quelconque). On pose $y = \frac{rx}{2N_1(x)}$ alors $N_1(y) = \frac{r}{2} < r$; donc, par la continuité en 0, on a $N_2(f(y)) \leq 1$. Maintenant de $y = \frac{rx}{2N_1(x)}$ on tire par linéarité que $f(x) = \frac{2N_1(x).f(y)}{r}$. Par suite $N_2(f(x)) \leq \frac{2N_1(x)}{r}$. Comme cette inégalité marche aussi pour $x = 0$, alors on peut prendre $c = \frac{2}{r}$.

— 2) $\Longrightarrow$ 1) Soit $x, y \in E$, alors $N_2(f(x) - f(y)) = N_2(f(x - y)) \leq cN_1(x - y)$. Donc f est c-lipschitzienne, par suite f est continue.

$\square$

Exercice 1.8.2. ***(Important à connaitre)*** *Soient (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces vectoriels normés, et $f : E \longrightarrow F$ une application lineaire. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction f est continue sur E.*

2. *La fonction f est continue en $0 \in E$.*

3. *La fonction f est bornée sur la boule unité fermée de E.*

Solution : Utiliser le résultat précédent. □

Théorème 1.8.8. *Si $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé, alors, les applications (opérations de base)*

$$S : \ E \times E \longrightarrow E : \ (x, y) \longmapsto x + y$$
$$P : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E : \ (\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$$

sont continues pour cette norme.

Preuve

1. La continuité de S découle de : $||(x + y) - (x_0 + y_0)|| = ||(x - x_0) + (y - y_0)|| \leq ||x - x_0|| + ||y - y_0||$.

2. La continuité de P découle de : $||\lambda x - \lambda_0 x_0)|| \leq |\lambda - \lambda_0|.||x - x_0|| + |\lambda_0|.||x - x_0|| + ||x_0||.|\lambda - \lambda_0|$.

□

Convexité dans les espaces vectoriels

Soit $(E, ||.||)$, un espace vectoriel normé. Soit $W \subset E$, on dit que W est convexe si $\forall u, v \in W$, le segment de droite $[u, v] = \{w = tv+(1-t)v/0 \leq t \leq 1\} = \{w = \alpha v+\beta v/\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$ est dans W. Pour des exemples classiques de convexité dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ voir le cours de L1MPI. Noter que l'application $P \times S : \mathbb{K} \times E \times E \longrightarrow E : (\lambda, x, y) \longmapsto \lambda.x+(1-\lambda)y$ est continue.

Exercice 1.8.3. *Montrer que dans un evn (espace vectoriel normé) $(E, ||.||)$, toute boule ouverte est homéomorphe à E.*

Solution Comme $u : B_o(a, r) \to B_o(O, 1) : x \mapsto \frac{x-a}{r}$ est un homéomorphisme (car les opérations de base dans un evn sont continues : voir ci dessus) , il suffit de considérer l'application $f(x) = \frac{x}{1+||x||}$ de E dans $B_o(O, 1)$ et sa réciproque, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-||y||}$, et de vérifier que c'est un homéomorphisme.

Projection stéréographique

Cas particulier : Paramétrage du cercle

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i}$ est l'axe vertical. Un point est de coordonnées (x_0, x_1). Le point $N = (1, 0)$ est appelé pôle nord et le point $S = (0, 1)$ est appelé pôle sud.

Figure

On considère le cercle unité $\mathcal{S}^1 = \{(x_0, x_1)\ / x_0^2 + x_1^2 = 1\}$. On pose $\alpha = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP})$ où P est sur le cercle et $x_0 = \cos\alpha,\ x_1 = \sin\alpha,\ \alpha \in]0, 2\pi]$. En posant $t = \cot\dfrac{\alpha}{2}$ pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, on a $x_0 = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $x_1 = \dfrac{2t}{t^2+1}$ qui paramétrent tous les points du cercle sauf le pôle nord $N = (1, 0)$. Alors, considérons l'application :

$P_N : \mathbb{R} \to \mathcal{S}^1 \setminus \{N\} : t \mapsto (x_0, x_1), \quad$ avec $x_0 = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $x_1 = \dfrac{2t}{t^2+1}$

et sa réciproque $P_N^{-1} : \mathcal{S}^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R} : (x_0, x_1) \mapsto t = \dfrac{x_1}{1-x_0}$. Alors P_N est bicontinue et donc est un homéomorphisme.

Géométriquement, la droite NP coupe l'axe $(O, \overrightarrow{j})$ au point $Q = (0, t)$. Raison pour laquelle on parle de projection stéréographhque du cercle sur la droite suivant le pôle nord.

Conclusion : on dit que si on enlève un point d'un cercle, on peut l'étirer pour le confondre avec une droite en conservant ses propriétés topologiques.

Cas général :

Soit $\mathcal{S}^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le point $N = (1, \ldots, 0)$ est appelé pôle nord et le point $S = (0, \ldots, 1)$ est appelé pôle sud.

On note $B = p_N(A)$ la projection stéréographique de $A \in \mathcal{S}^n$ suivant le pôle nord.

Figure

Si $A = (x_0, ..., x_n) \in \mathcal{S}^n$ et $B = p_N(A) = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ alors $y_i = \frac{x_i}{1-x0}$ pour $1 \leq i \leq n$.

On voit facilement que p_N est continue.

Pour la réciproque : comme $\sum x_i^2 = 1$ alors, en utilisant la norme euclidienne, on a $\|B\|^2 = \sum y_i^2 = \frac{1-x_0^2}{(1-x_0)^2} = \frac{1+x_0}{1-x_0}$ d'où l'on tire x_0, puis $x_1, ..., x_n$ en fonction de $||B||$, avec $x_0 = \frac{\|B\|^2-1}{\|B\|^2+1}$, $x_i = \frac{2y_i}{\|B\|^2+1}$.

Ainsi P_N est bijective et P_N^{-1} est bein continue, par suite P_N est un homéomorphisme : $\mathcal{S}^n \backslash \{N\} \simeq \mathbb{R}^n$.

Exercice 1.8.4. *Montrer que l'espace métrique $\mathcal{S}^1 = \{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$ avec la métrique induite par l'inclusion dans $\mathbb{R}^2$ n'est homéomorphe à aucun interval (segment) de $\mathbb{R}$ (utiliser une projection stéréographiquee).*

Définition 1.8.6. ***(Proposition)*** *Soient (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces vectoriels normés. On désigne $L_c(E, F)$, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Pour $f \in L_c(E, F)$, on pose $||f|| = \sup_{x \neq 0} \frac{N_2(f(x))}{N_1(x)}$;*
$||.||$ est une norme sur $L_c(E, F)$. On dit que c'est une norme subordonnée. On a aussi

1. $||f|| = \sup_{N_1(x) \leq 1} N_2(f(x)) = \sup_{N_1(x)=1} N_2(f(x))$
   $= \min\{c > 0 : N_2(f(x)) \leq cN_1(x); \forall x \in E\}$
2. *Soit (G, N_3) un espace vectoriel normé. Si $f \in L_c(E, F)$ et $g \in L_c(E, G)$, alors $h = gof \in L_c(E, G)$ et $||gof|| \leq ||g||.||f||$.*

Définition 1.8.7. ***(Proposition)****(version matricielle) $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

(α) On dit que l'application $|||.|||$ *:* $\mathbb{M}_n(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une norme matricielle si :*

— - *c'est norme sur l'espace vectoriel* $\mathbb{M}_n(K)$

— - $\forall A, B \in \mathbb{M}_n(K), \quad |||AB||| \leq |||A|||.|||B|||$.

(β) Soit $||.||$ *une norme sur* K^n*. La norme sur* $\mathbb{M}_n(K)$ *subordonneée à cette norme est donnée par* $|||A||| = \sup_{V \neq 0} \frac{||AV||}{||V||}$*. Cette norme est une norme matricielle.*

(γ) On donne ci-dessous les 3 normes uselles suivantes sur K^n *et les normes matricielles associées :* $V = (V_1, \ldots, V_n)$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

1. $||V||_1 = \sum_{i=1}^n |V_i|$, $|||A|||_1 = \max_j (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$
2. $||V||_\infty = \max_i |Vi|$, $|||A||| =_\infty = \max_i (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$
3. $||V||_2 = (\sum_{i=1}^n |V_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A.A^\star)} = \sqrt{\rho(A^\star.A)} = |||A^\star|||_2$.

   $\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ *est le rayon spectrale de la matrice* B*, les* λ_i *sont les valeurs propres de la matrice* B *et* $A^\star = t_{\overline{A}}$ *est le trans-conjugué de* A *si* A *est complexe et la transposée de* A *(*$A = t_A$*) si* A *est réel.*

Chapitre 2

Complétude et espaces métriques

2.1 Généralités sur les espaces complets

Définition 2.1.1. *On considère que $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle.*

Deux suites réelles, $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont dites adjascentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence tend vers zèro. Précisément $(U_n)_n \nearrow$, $(V_n)_n \searrow$ et $(U_n - V_n) \to 0$.

Proposition 2.1.1. *On considère que $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle. Deux suites réelles, adjascentes convergent vers la même limite.*

preuve : $(U_n)_n \nearrow$ et $(V_n)_n \searrow$ alors $(V_n - U_n)_n \searrow$ or $\lim V_n - U_n = 0$ donc $inf\{V_n - U_n, n \in \mathbb{N}\} \geq 0$ d'où $V_n - U_n \geq 0$ $\forall n \Leftrightarrow V_n \geq U_n$, $\forall n$ et comme $(U_n)_n \nearrow$ et majorée par V_0 et $(V_n)_n \searrow$ et minorée par U_0 donc $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent. Comme $\lim \big(V_n - U_n\big) = 0$ alors $\lim U_n = \lim V_n$

□

Définition 2.1.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(U_n)_n$ dans X est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$ $(p \geq N, q \geq N \Rightarrow d\big(U_p, U_q\big) < \varepsilon)$*

Théorème 2.1.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Une suite dans X qui converge vers une limite $l \in X$ est de cauchy.*

Preuve

Supposons que $(U_n)_n$ converge vers l

Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N/\ \forall n \geq N,\ d(U_n, l) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d'où pour $p \geq N$ et $q \geq N$ on a $d(U_p, U_q) \leq d(U_p, l) + d(U_q, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ d'où le résultat. $\square$

Remarque 2.1.1. — *La réciproque de ce résultat est faux car on sait que dans $\mathbb{Q}$ il y'a des suites de Cauchy qui ne convergent pas. Par exemple dáprès la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $z_n \in \mathbb{Q} \cap]\sqrt{7} - \frac{1}{3n}, \sqrt{7} + \frac{1}{3n}[$; on peut facile vérifier que (z_n) est de Cauchy et ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.*

— *En L1MPI, la notion de "complet" est défini sur les corps commutatifs totalement ordonnée par l'existence de la "borne supérieure". Mais cette façon de définir la notion de "complet" ne peut se généraliser à des ensembles non totalement ordonnés.*

— *Dans ce qui suit, on définit la notion de "complet" par la convergence des suites de Cauchy.*

Définition 2.1.3. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit X est* ***complet*** *si toute suite de Cauchy converge.*

Vocabulaire

un espace vectoriel muni d'un **produit scalaire** est appelé espace **préhilbertien**.

un espace **préhilbertien complet** est appelé espace de **Hilbert**.

Un espace vectoriel **normé complet** est appelé espace de **Banach**.

Théorème 2.1.3. *On considère que $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle. Alors $\mathbb{R}$ est un espace métrique complet.*

Preuve :

Supposons que $(U_n)_n$ est de Cauchy. nous allons d'abord montrer que $(U_n)_n$ est bornée puis construire deux suites adjascentes $(V_n)_n$ et $(W_n)_n$ telles que $V_n \leq U_n \leq W_n$.

- $\underline{(U_n)_n \text{ est majorée}}$?

Pour $\varepsilon = 1\ \exists N_0/p, q \geq N_0 \Rightarrow |U_p - U_q| < 1 \Rightarrow ||U_p| - |U_q|| < 1$ et donc en particulier $||U_p| - |U_{N_0}|| < 1 \Leftrightarrow ||U_{N_0}| - 1| < |U_p| < 1 + |U_{N_0}|$

d'où $\forall p \geq N_0\ |U_p| < 1 + |U_{N_0}|$ ainsi (comme déjà vu dans une preuve précédente) on a :

$|U_p| \geq max\{|U_0|, |U_1|, ..., |U_{N_0}|, 1 + |U_{N_0}|\}$ donc $(U_n)_n$ est bornée.

- Suites adjascentes Comme $(U_n)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$ alors toute partie de $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ donc pour tout n, $inf_{m\geq n}\{U_m\}$ et $sup_{m\geq n}\{U_m\}$ existe. On pose $V_n = inf_{m\geq n}\{U_m\}$ et $W_n = sup_{m\geq n}\{U_m\}$. Alors il est facile de voir que $V_n \leq U_n \leq W_n$ et $(V_n)_n \nearrow$ et $(W_n)_n \searrow$.

Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N' /\ \forall m \geq n \geq N'$ $|U_m - U_n| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow U_n - \frac{\varepsilon}{3} < U_m < U_n + \frac{\varepsilon}{3}$,

ainsi $U_n - \frac{\varepsilon}{3} \leq inf_{m\geq n}\{U_m\} \leq sup_{m\geq n}\{U_m\} \leq U_n + \frac{\varepsilon}{3}$.

D'où $U_n - \frac{\varepsilon}{3} \leq V_n \leq W_n \leq U_n + \frac{\varepsilon}{3}$

$0 \leq W_n - V_n \leq (U_n + \frac{\varepsilon}{3}) - (U_n - \frac{\varepsilon}{3}) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

D'où on a $0 \leq W_n - V_n < \varepsilon$; ce qui veut dire que $\lim W_n - V_n = 0$.

Par suite (W_n) et (V_n) sont adjascentes donc convergent vers la même limite l. Comme $V_n \leq U_n \leq W_n$, $\forall n$, alors $(U_n)_n$ converge vers l. □

Théorème 2.1.4. *Soit $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$ muni de l'une des distances usuelles.*

1. *Soit $L = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ et $X_r = (X_{1r}, ..., X_{nr}) \in \mathbb{R}^n$,*

   alors $\lim\limits_{r\to+\infty} X_r = L \Leftrightarrow \lim\limits_{r\to+\infty} X_{ir} = \ell_i$ pour $1 \leq i \leq n$
2. *Soit $\ell = a + ib$ et $X_r = U_r + iV_r$ avec $U_r, V_r \in \mathbb{R}$,*

   alors $\lim\limits_{r\to+\infty} X_r = \ell$ dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si $\lim\limits_{r\to+\infty} U_r = a$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} V_r = b$ dans $\mathbb{R}$
3. *Soit $X_r = (X_{1r}, X_{2r}, ..., X_{nr})$, alors $(X_r)_r$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si (X_{ir}) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq n$*
4. *Soit $X_r = U_r + iV_r$, alors $(X_r)_r$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si (U_r) et (V_r) sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$.*

Preuve : à faire. □

Théorème 2.1.5. *Soit $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$ muni de l'une des distances usuelles, alors E est complet.*

Preuve Découle du théorème précédent et des suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$. □

Théorème 2.1.6. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, muni de l'une des normes usuelles, alors complet.*

Nota bene :

Dans la section sur la compacité, on va montrer que sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ; donc un espace vectoriel normé de dimension finie est E complet.

Preuve Soit E est un espace vectoriel normé de dimension finie n de base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit φ l'isomorphisme linéaire

$$\begin{array}{cccc} \varphi & \left(E, ||.||_\infty^E\right) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty^{\mathbb{R}^n}\right) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i & & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

alors $||\varphi(x)||_\infty^{\mathbb{R}^n} = ||x||_\infty^E$, $\forall x \in E$. Par suite l'image d'une suite de Cauchy de E par φ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$ et l'image d'une suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ par φ^{-1} est une suite convergente dans E. Ansi E est complet pour cette norme car $\mathbb{R}^n$ est complet.

$\square$

Caractérisation des fermés et théorème de Cantor généralisé (généralisation du thprème des intervalles emboités de $\mathbb{R}$) sur dans les espaces métriques complets.

Théorème 2.1.7. *On considère que (E, d) est un espace mtŕique. Alors (E, d) est complet si et seulement si pour toute suite $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ des fermés non vides de E telles que :*

$S_1 \supset S_2 \supset S_3 ... \supset S_r \supset ...$ et $\lim\limits_{r \to +\infty} \operatorname{diam}(S_r) = 0$, alors l'intersection $I = \bigcap\limits_{r=1}^{+\infty} S_r$ contient un seul point X de E.

Proposition 2.1.8. *Soit (E, d) un espace métrique et $F \subset E$.*

1. *Si le sous-espace métrique (F, d) est complet, alors F est un ferme de E.*
2. *Si E est complet et si F est fermé dans E, alors F est complet.*

Preuve

1. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de F qui converge dans E. La suite $(x_n)_n$ est donc de Cauchy dans E, donc aussi dans F. Comme F est complet, alors $(x_n)_n$ converge vers un élément de F. Ainsi F est un fermé de E.

2. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans (F, d). Elle est de Cauchy dans (E, d) qui est complet, donc elle converge dans E. Mais F est, fermé dans E, alors la limite de $(x_n)_n$ est dans F. Par suite (F, d) est complet

□

Exemple 2.1.1. .

1. *Le sous espace métrique $[a, b]$ est complet munit de la topologie induite de $\mathbb{R}$.*
2. *La suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_n$ est de Cauchy dans $]0, 1]$ mais n'y converge pas, donc, $]0, 1]$ n'est complet muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.1.9. *Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur E. Alors (E, d_1) est complet si et seulement si (E, d_2) est complet.*

Preuve : simple

□

Théorème 2.1.10. *On considère $f : (E; d) \to (F; \delta)$.*

1. *La fonction f est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n)_n; (y_n)_n$ de E telles que $d(x_n; y_n)$ tend vers 0, $\delta\big(f(x_n); f(yn)\big)$ tend vers 0.*
2. *Si f est uniformément continue, l'image par f d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.*

Preuve A faire □

Remarque 2.1.2. *Les suites de Cauchy (et donc la complétude) n'est pas préservée par homéomorphisme. Par exemple : l'application $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Or $]-1, 1[$ n'est pas complet car $(-1 + \frac{1}{n})_n$ est de Cauchy dans $]-1, 1[$ mais n'y converge pas. De plus la suite donnée par $x_n = n$, n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$ mais, a pour image la suite donné par $\frac{n}{1+n} = 1 - \frac{1}{n}$, qui est de Cauchy dans $]-1, 1[$.*

Corollaire 2.1.11. *Soit $(E; d)$ un espace complet et $f : (E; d) \to (F; \delta)$ un homéomorphisme tel que f^{-1} est uniformément continue. Alors F est complet.*

Définition 2.1.4. *(**equivalence-topologique de deux distances**) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques avec $X \subset Y$. On dit que d_X et d_Y sont topologiquement-équivalents si l'application identité* $\mathrm{id} : X \longrightarrow Y$ *est un homéomorphisme c'est-à-dire U est un ouvert de (X, d_X) si et seulement si U est un ouvert de (Y, d_Y).*

De façon similaire, on définit des normes toplogiquement équivalentes.

Définition 2.1.5. *(**Equivalence-uniforme de deux distances**) On dit que deux distances d_1 et d_2 sur E sont **uniformément équivalentes** si l'identité $id : (E; d1) \to (E; d2)$, est uniformément bicontinu (= id et id^{-1} son uniformément continues).*

De façon similaire, on définit des normes uniformément équivalente.

Corollaire 2.1.12. *Si (E, d_1) et (E, d_2) sont uniformément équivalentes, alors (E, d_1) est complet si et seulement si (E, d_2) est complet.*

Proposition 2.1.13. *Soient N_1 et N_2 deux normes topologiquement équivalentes sur un espace vectoriel normé (evn) E. Alors, elles sont équivalentes et donc uniformément-équivalentes aussi.*

Preuve Comme N_1 et N_2 sont toplogiquement équivalentes, par continuité en 0 de l'application identité de (E, N_1) dans (E, N_2) il existe $\eta > 0$ tel que si $N_1(x) < \eta$ alors $N_2(x) < 1$. Soit $x \in E, x \neq 0$, on pose $y = \frac{\eta}{2} . \frac{x}{N_1(x)}$, alors, $N_1(y) < \eta$, d'où, $N_2(y) < 1$. Ainsi, $N_2(x) < \frac{2}{\eta} N_1(x)$. En travaillant avec l'identité réciproque, on a $N_1(x) < \frac{2}{\eta'} N_2(x)$. Par suite N_1 et N_2 sont équivalentes.

Proposition 2.1.14. *Soient (E_i, d_i), $1 \leq i \leq n$, des espaces métriques. L'espace métrique produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est complet si et seulement si pour tout i, l'espace (E_i, d_i) est complet.*

Preuve : C'est une génralisation de la complétude de $\mathbb{R}^n$, vu ci-dessus. $\square$

Théorème 2.1.15. *(**Théorème de Picard ou Théorème du point fixe**)*

Soit $(X; d)$ un espace métrique complet. Si l'application $f : X \to X$ est une application contractante, c'est-à-dire $\exists\ 0 < k < 1 / \forall x, y \in X; d\big(f(y), f(x)\big) \leq kd(y, x)$ alors elle admet un unique point $x \in X$ vérifiant $f(x) = x$ appellé point fixe. De plus, toute suite récurrente *donnée par* $x_{n+1} = f(x_n)$ *et* $x_0 \in X$ *converge géométriquement vers* x, *c'est-à-dire :* $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x, x_n) \leq d(x, x_0)k^n$.

□

Dans l'exercice qui suit on donne un espace munit de deux distances topologiement-équivalentes mais non équivalentes.

Exercice 2.1.1. *Soit* $E = \mathcal{C}_o([-1,1], \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues de* $[-1,+1]$ *dans* $\mathbb{R}$. *Pour* $\phi \in E$, *on pose* $||\phi||_1 = \int_{-1}^{+1} |\phi(t)|dt$ *et* $||\phi||_2 = \left(\int_{-1}^{+1} |\phi(t)|^2 dt\right)^{1/2}$.

1. *Montrer que* $(E, ||.||_1)$ *est un espace normé.*
2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on définit* $\phi \in E$, *par*
$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & si \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
   (a) *Montrer que si* $(\phi_n)_n$ *converge vers* ϕ *dans* $(E, ||.||_1)$, *alors* $\phi(x) = 0$, *si* $x < 0$ *et* $\phi(x) = 1$, *si* $x \geq 0$.

   (b) *Déduire de la question précédente que* $(E, ||.||_1)$, *n'est pas un espace de Banach.*
3. *Montrer que* $(E, ||.||_1)$ *est préhilbertien mais n'est pas un espace de Hilbert.*

Solution

1. Montrons que $(E, ||.||_1)$ est un espace normé. On a $||\phi||_1 = \int_{-1}^{+1} |\phi(t)|dt$. Donc d'apres les proprités des intégrales, on a $||f||_1 = \displaystyle\int_{-1}^{+1} |f(t)|dt \geq 0$, $||\alpha f||_1 = \displaystyle\int_{-1}^{+1} |\alpha f(t)|dt = \displaystyle\int_{-1}^{+1} |\alpha|.|f(t)|dt = |\alpha|.||f||_1$, et $||f+g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$ (inégalité triangulaire).
   Montrons que $||f||_1 = 0 \Rightarrow f = 0$. Par contraposé : supposons $f \neq 0$, alors il existe $x_0 \in [-1,1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$, ainsi comme f est continue, il existe $a < b$ dans $[-1,1]$ tel que $|f| \geq \dfrac{|f(x_0)|}{2}$. Alors $||f||_1 \geq \dfrac{|f(x_0)|}{2}(\beta - \alpha)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\phi \in E$, par
$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Supposons que $(\phi_n)_n$ converge vers ϕ.

— On a $\displaystyle\int_{-1}^{0} ||\phi(t)||dt = \int_{-1}^{0} |\phi_n(t) - \phi(t)|dt$, car $\phi_n = 0$ sur $[-1, 0]$.
Or $\displaystyle\int_{-1}^{0} |\phi_n(t) - \phi(t)|dt \leq \int_{-1}^{1} |\phi_n(t) - \phi(t)|dt = ||\phi_n - \phi||_1$. Donc, $\displaystyle\int_{-1}^{0} |\phi(t)|dt \leq ||\phi_n - \phi||_1$. Mais $||\phi_n - \phi||_1 \to_{n\to+\infty} 0$. Par suite $\displaystyle\int_{-1}^{0} ||\phi(t)||dt = 0$, donc $\phi = 0$ sur $[-1, 0]$ car ϕ est continue sur $[-1, 1]$, puis que par hypothèse, $\phi \in E = \mathcal{C}_o([-1, 1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues.

— Soit $\varepsilon > 0$, pour tout n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, on a
$\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} |\phi(t) - 1|dt = \int_{\varepsilon}^{1} |\phi_n(t) - \phi(t)|dt$, car $\phi_n = 1$, sur $[\frac{1}{n}, 1] \supseteq [\varepsilon, 1]$.
Or $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} |\phi_n(t) - \phi(t)|dt \leq \int_{-1}^{1} |\phi_n(t) - \phi(t)|dt = ||\phi_n - \phi||_1$. Donc, $\displaystyle\int_{1}^{\varepsilon} |\phi(t) - 1|dt \leq ||\phi_n - \phi||_1$. Mais $||\phi_n - \phi||_1 \to_{n\to+\infty} 0$. Par suite $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} |\phi(t) - 1|dt = 0$, donc $\phi - 1 = 0$ sur $[\varepsilon, 1]$ car ϕ est continue sur $[-1, 1]$, puis que par hypothèse, $\phi \in E = \mathcal{C}_o([-1, 1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues.
En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\phi = 1$ sur $]0, 1]$.

(b) Montrons que $(E, ||.||_1)$, n'est pas un espace de Banach. Comme l'espace est normé, il reste à montrer qu'il n'est pas complet. Prenons la suite précédente, on a : pour

$$m > n,\ \phi_n - \phi_m = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ (m-n)x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{m} \\ 1 - nx & \text{si} \quad \frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} |\phi_n - \phi_m|dt = \int_{-1}^{0} |\phi_n - \phi_m|dt + \int_{0}^{\frac{1}{m}} |\phi_n - \phi_m|dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |\phi_n - \phi_m|dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} |\phi_n - \phi_m|dt = 0 + (m-n)\frac{1}{2m^2} + (\frac{1}{n} - \frac{1}{m}) - \frac{n}{2}(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}) + 0 \leq \frac{3}{2n}$, car $m > n$.
Donc $||\phi_n - \phi_m||_1 \leq \dfrac{3}{2n}$. Ansi $(\phi_n)_n$ est de Cauchy. Mais, d'aprés la question préćdente s'il converge vers ϕ alors $\phi \notin E$, car ϕ n'est pas continue en 0, ce qui absurde. Par suite $(E, ||.||_1)$ n'est pas complet, donc n'est pas un espace de Banach.

3. Montrer que $(E, ||.||_1)$ est préhilbertien mais n'est pas un espace de Hilbert en s'inspirant de la démarche précédente

$\square$

2.2 Prolongement des applications contininues

Dans cette section, nous allons voir dans quelle conditions une application peut se prolonger par continuité. Nous prśenterons le théorème qui a de nombreuses applications.

Proposition 2.2.1. *Soit $f : (E, d) \to (F, \delta)$ continue et surjective. Soit A une partie dense de (E, d). Alors $f(A)$ est dense dans (F, δ).*

Preuve Simple. $\square$

Théorème 2.2.2. ***(fondamental)**. Soit $f, g : (E, d) \to (F; \delta)$ continues. Si $f = g$ sur une partie dense A de E alors $f = g$ sur E.*

Théorème 2.2.3. ***(Prolongement des applications uniformément continues)**. Soient (E, d) un espace métrique, $A \subset E$ une partie dense dans E, (F, δ) un espace métrique complet. Soit une application $f : (A, d_A) \to (F, \delta)$ uniformément continue. Alors, il existe une unique application $\overline{f} : (E, d) \to (F, \delta)$ uniformément continue telle que $\overline{f}/A = f$.*

Preuve

<u>Existence</u>. Soit $x \in E$. Par densité de A, il existe une suite $(x_n)_n$ de A convergeant vers x dans E. La suite (x_n) est de Cauchy dans A. Comme f est uniformément continue, alors la suite $\big(f(x_n)\big)_n$ est de Cauchy dans F. Comme F est complet elle converge, on appelle $\overline{f}(x)$ sa limite. La limite ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_n$ car si $(y_n)_n$ est un autre suite de A convergeante vers x, alors $d(x_n; y_n)$ tend vers 0 donc $d(f(x_n); f(y_n))$ tend vers 0 d'après le théoorème préecédent. En particulier $\overline{f} = f$ sur A. Montrons que $\overline{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, $d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x, y \in E$ tel que $d(x, y) < \eta/3$.

Par définition de $\overline{f}$ et par densité de A, il existe $x', y' \in A$ avec $d(x, x') < \eta/3$ et $d(y, y') < \eta/3$, tels que $\delta(\overline{f}(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $\delta(\overline{f}(y), f(y')) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Comme $d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') \leq \eta$, par suite $\delta(f(x'), f(y')) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Par suite $\delta(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \leq \delta(\overline{f}(x), f(x')) + \delta(f(x'), f(y')) + \delta(f(y'), \overline{f}(y)) < \varepsilon$.

Il reste à voir l'unicité : si g continue prolonge f sur E, elle coincide avec $\overline{f}$ sur une partie dense, donc lui est égale sur E.

□

Corollaire 2.2.4. *Soient (E, d) un espace normé, D un sous-espace dense dans E et F un espace de Banach (=evn complet). Alors, toute application lineaire continue $f : D \to F$ se prolonge de manière unique en une application lineaire continue . $\overline{f} : E \to F$.*

Preuve Montrons d'abord que f est uniformément continue. Soit $x, y \in E$, posons $d(x, y) = ||x - y||$. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in D$ $(||x - y|| < \eta \Rightarrow ||f(x - y)|| < \varepsilon$, alors par linéairit''e, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0 / \forall x, y \in D$ $(||x - y|| < \eta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$. Donc, f est uniformément continue.

Le théorème précédent assure l'existence d'un prolongement $\overline{f}$ de f uniformement continue. Montrons que f est lineaire.

Soient x et y deux elements de E, et soient α et β deux scalaires. Il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans D qui convergent respectivement vers x et y. Alors
$\overline{f}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to +\infty} f(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n \to +\infty} \alpha f(x_n) + \beta f(y_n) = \alpha \overline{f}(x) + \beta \overline{f}(y)$. □

Théorème 2.2.5. *(**Théorème de Baire**). Soit E un espace métrique complet.*

1. *Toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E. Autrement dit, si $(\mathcal{O}_n)_n$ est une suite d'ouverts de E telle que $\overline{\mathcal{O}_n} = E$ pour tout n, alors $\overline{\bigcap_n \mathcal{O}_n} = E$.*

2. *Toute reunion dénombrable de fermés de E d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

Chapitre 3

Compacité et Espaces métriques

L'utilité de la notion de compacité vient du fait qu'elle permet en général, de ramener des problèmes de complexité apparemment infinie à l'étude d'un nombre fini de cas ($\Leftrightarrow$ de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un recouvrement fini).

Le terme de compacité évoque la notion d'étroitesse. Ainsi dans un espace topologique compact, il n'est pas possible de mettre une infinité de points sans qu'ils s'accumulent quelque part ($\Leftrightarrow$ l'existence des valeurs d'adhérences dans les espaces mt́riques).

3.1 Généralités

Définition 3.1.1. *Soit $\mathcal{H}$ une famille d'ouverts d'un espace métrique (X,d) et S une partie de X. On dit que $\mathcal{H}$ recouvre S si $S \subseteq \cup_{H\in\mathcal{H}} H$*

Exemple 3.1.1. *On considère que $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle.*

— $S_1 = [0,1]$ *est couvert par la famille d'ouverts* $\mathcal{H}_1 = \{]x - \frac{1}{5}, x + \frac{1}{5}[, 0 < x < 1\}$ *mais aussi par la famille* $\mathcal{H}'_1 = \{] - \frac{1}{2}, \frac{1}{n}[\cup]\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{n}[, n \geq 2\}$

— $S_2 = \{1, 2, ..., n, n+1, ...\}$ *est couvert par la famille d'ouverts* $\mathcal{H}_2 = \{]n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}[, n \geq 1\}$ *mais aussi par la famille* $\mathcal{H}'_2 = \{]n-1, n+1[, n \geq 1\}$

— $S_3 =]0,1[$ *est couvert par* $\mathcal{H}_3 = \{]0, x[, 0 < x < 1\}$ *mais aussi par la famille* $\mathcal{H}'_3 = \{]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[, n \geq 2\}$

— $S_4 = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\right\}$ *est couvert par* $\mathcal{H}_4 = \{]\frac{1}{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{n-\frac{1}{2}}[, n \geq 1\}$

Définition 3.1.2. *Un espace métrique (E, d) est dit compacte si de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini c-a-d si $E = \cup_{i \in I} U_i$ où est un ouvert, alors il existe $U_1, \ldots, U_n$ tel que $E = \cup_{i=1}^{n} U_i$.*

Voir cours L1MPI

Exemple 3.1.2. $\mathbb{R}^n = \cup_{n \geq 0}]-\infty, n[$, *n'est pas compacte.*

Définition 3.1.3. *Une partie A d'un espace métrique (X, d) est dit compacte si (A, d_A) est compacte en tant que sous espace métrique .*

Exemple 3.1.3. $[a, b[= \cup_{n \geq n_0} [a, b - \frac{1}{n}[$ *avec* $n_0 > E(\frac{1}{b-a}) + 1$, *n'est pas compacte.*

Dans ce qui suit, on revisite les compactes de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une des distances usuelles.

Théorème 3.1.1. *Heine-Borel On considère que $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Soit S une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}$, alors S est compacte.*

Preuve : Soit $\mathcal{H}$ un recouvrement de S . S est bornée dans $\mathbb{R}$ donc $\sup S$ et $\inf S$ existent. Posons $\alpha = \sup S$ et $\beta = \inf S$. Comme S est fermée alors $\alpha, \beta \in S$. On définit : $S_x = S \cap [\alpha, x]$ pour tout $x \geq \alpha$ et $F = \{x / \alpha \leq x \leq \beta \text{ et } S_x \text{ admet un sous recouvrement fini } \mathcal{H}_x \subseteq \mathcal{H}\}$.

Comme $S_\beta = S$, pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que $\beta \in F$.

Comme $\alpha \in S$, alors $S_\alpha = \{\alpha\}$. Mais $\alpha \in S$ donc il existe $H_\alpha \in \mathcal{H}$ tel que $\alpha \in H_\alpha$ (car $S \subseteq \cup_{H \in \mathcal{H}} H$). Ainsi $\alpha \in F$ par suite $F \neq \emptyset$.

Comme $F \neq \emptyset$ et majoré par β alors F admet une borne supérieure . Soit $\gamma = \sup F$

Montrons que $\gamma = \beta$. Comme $\gamma \leq \beta$ il suffit de montrer que $\gamma < \beta$ est impossible. Pour cela , nous allons étudier deux cas : ($\gamma < \beta$ et $\gamma \in S$) et ($\gamma < \beta$ et $\gamma \notin S$).

1er cas :

Supposons $\gamma < \beta$ et $\gamma \notin S$

$\gamma \notin S$ et S fermé ce qui implique que $\gamma \notin S = \overline{S}$ donc il existe $\varepsilon > 0 / \quad \frac{\varepsilon}{2} < \beta - \gamma$ tel que $]\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon[\cap S = \emptyset$ et on a $S_{\gamma + \frac{\varepsilon}{2}} = S \cap [\alpha, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}] = S \cap ([\alpha, \gamma - \frac{\varepsilon}{2}] \cup S \cap [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}]$ $= S_{\gamma - \frac{\varepsilon}{2}} \cup \emptyset$

donc $S_{\gamma + \frac{\varepsilon}{2}} = S_{\gamma - \frac{\varepsilon}{2}}$. Par définition de γ, $S_{\gamma - \frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini donc $S_{\gamma + \frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini et comme $\gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \beta$ alors $\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \in F$ ce qui contredit le fait que γ est la borne supérieure de F.

2ème cas : Supposons $\gamma < \beta$ et $\gamma \in S$. $\gamma \in S$ alors il existe $H_\gamma \in \mathcal{H}$ tel que $\gamma \in H_\gamma$ mais H_γ est un ouvert donc, il existe $\varepsilon > 0$ et$\frac{\varepsilon}{2} < \beta - \gamma$ tel que $\gamma \in]\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon[\subseteq H_\gamma$. Par définition de γ, on a $S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini $\{H_1, H_2, ..., H_n\} \subseteq \mathcal{H}$.

On a $S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}} = S \cap [\alpha, \gamma - \frac{\varepsilon}{2}]$

$S_{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}} = S \cap [\alpha, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}] = S \cap \big([\alpha, \gamma - \frac{\varepsilon}{2}] \cup [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}]\big)$

$= S \cap ([\alpha, \gamma - \frac{\varepsilon}{2}]) \cup S \cap [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}])$

$= S_{\gamma-\frac{\varepsilon}{2}} \cup S \cap [\gamma - \frac{\varepsilon}{2}, \gamma + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq (\cup_{i=1}^{n} H_i) \cup H_\gamma$

Donc $\alpha < \gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \beta$ et $S_{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini de $\mathcal{H}$ ainsi $\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \in F$ ce qui contredit le fait que γ est une borne supérieure.

On vient de démontrer avec ces deux cas que nécessairement $\gamma = \beta$ et $\gamma \in S$ car $\beta \in S$. Ainsi, il existe $H_\beta \in \mathcal{H}$ tel que $\beta \in H_\beta$ et comme H_β est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\beta \in]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[\subseteq H_\beta$. Par définition de F, $S_{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}$ admet un recouvrement fini $\{H'_1, H'_2, ..., H'_n\} \subseteq \mathcal{H}$.

$S_{\beta+\frac{\varepsilon}{2}} = S \cap [\alpha, \beta + \frac{\varepsilon}{2}]$

$= S \cap [\alpha, \beta - \frac{\varepsilon}{2}] \cup S \cap [\beta - \frac{\varepsilon}{2}, \beta + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq (\cup_{i=1}^{m} H'_i) \cup H_\beta$. Donc S_β admet un recouvrement fini . Mais $S_\beta = S$ d'où le résultat. La preuve est complète. $\square$

Exemple 3.1.4. *On suppose que $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle.*

1. $S_1 = [0, 1]$ *est un compact couvert par la famille d'ouverts* $\mathcal{H}_1 = \{]x - \frac{1}{5}, x + \frac{1}{5}[, 0 < x < 1\}$, *pour extraire une famille finie, il suffit de prendre* $x_k = \frac{k}{10} \quad 0 \leq k \leq 9$ *alors* $[0, 1] \subseteq \cup_{k=0}^{9}]\frac{k}{10} - \frac{1}{5}, \frac{k}{10} + \frac{1}{5}[$

2. $S_2 = \{1, 2, ..., n, n+1, ...\}$ *est couvert par la famille d'ouverts* $\mathcal{H}_2 = \{]n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}[, n \geq 1\}$. *Comme chaque intervalle contient un seul entier et que les intervalles sont deux à deux disjoints, on ne peut extraire une famille finie de* $\mathcal{H}_2$ *qui recouvre* S_2. *Ainsi* S_2 *n'est pas compact. Autre exemple, comme* $\{n\}$ *est un ouvert de* S_2 *pour la distance induite, alors* $S_2 = \bigcup_{n\geq 1}\{n\}$ *est un recouvrement d'ouverts de* S_2 *et on ne peut extraire un recouvrement fini.*

Proposition 3.1.2. *Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Si S est non bornée ou non fermée dans $\mathbb{R}$ alors S n'est pas compacte.*

Preuve :

1er cas : Supposons S non bornée (pour fixer les idées supposons S non majoré). On a $S \subseteq \cup_{n\geq 1}]-\infty, n[$ et on ne peut extraire un recouvrement fini car $]-\infty, n[\subseteq]-\infty, n+1[$ et $\forall n > 1, \exists x_n > n/x_n \in S$.

2eme cas Supposons S bornée et non fermé. Donc $\overline{S} \neq S \Rightarrow \exists x_o \in \overline{S} \setminus S$ mais alors x_0 est un point d'accumulation.

Soit α un minorant de S et β un majorant de S, avec $\alpha, \beta \notin S$ alors $S \subseteq]\alpha, x_0[\cup]x_0, \beta[$.

Soit n_0 tel que $\alpha < x_0 - \frac{1}{n_0} < x_0 < x_0 + \frac{1}{n_0} < \beta$ par exemple $n_0 \geq max\{E(\frac{1}{\beta - x_0}), E(\frac{1}{x_0 - \alpha})\} + 1$

On a $S \subseteq]\alpha, x_0[\cup]x_0, \beta[= (\cup_{n\geq n_0}]\alpha, x_o - \frac{1}{n}[) \cup (\cup_{n\geq n_0}]x_o + \frac{1}{n}, \beta[)$ et on ne peut exraire un recouvrement fini. En effet on a $]\alpha, x_o - \frac{1}{n}[\subseteq]\alpha, x_o - \frac{1}{n+1}[$ et $]x_o + \frac{1}{m}, \beta[\subseteq]x_o + \frac{1}{m+1}, \beta[$ et de plus $]\alpha, x_o - \frac{1}{n}[\cap]x_o + \frac{1}{m}, \beta[= \emptyset \quad \forall n, m > 0$, ainsi si on extrait un recouvrement fini il va exister n_1 et n_2 tel que :

$S \subseteq (\cup_{n_0 \leq n \geq n_1}]\alpha, x_o - \frac{1}{n}[) \cup (\cup_{n_0 \leq n \geq n_2}]x_o + \frac{1}{n}, \beta[)$.

Ponsons $n_3 = max\{n_1, n_2\}$ alors $S \subseteq (\cup_{n_0 \leq n \geq n_3}]\alpha, x_o - \frac{1}{n}[) \cup (\cup_{n_0 \leq n \geq n_3}]x_o + \frac{1}{n}, \beta[) =]\alpha, x_o - \frac{1}{n_3}[\cup]x_o + \frac{1}{n_3}, \beta[$ ce qui est impossible car $]x_o - \frac{1}{n_3}, x_o + \frac{1}{n_3}[$ contient une infinité déléments de S puisque x_0 est un point d'accumulation.

□

Théorème 3.1.3. *Théorème de Heine-Borel généralisé sur $E = \mathbb{R}^n$*

Soit S un fermé borné de $E = \mathbb{R}^n$ muni de l'une des distances usuelles, alors S est un compact.

Proposition 3.1.4. *Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ muni de l'une des distances usuelles. Si S est non bornée ou non fermée dans $\mathbb{R}^n$ alors S n'est pas compacte.*

Preuve : S'inspirer du cas précédent.

Théorème 3.1.5. *Soit X un espace mérique. Alors X est compact si et seulement si pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$, de fermés de X dont l'intersection est vide, on peut en extraire un nombre fini dont l'intersection est vide.*

Preuve A faire

□

Proposition 3.1.6. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Si $f : X \longrightarrow Y$ continue entre deux espaces métriques, alors l'image par f d'un compact de X est un compact de Y.*

Preuve Soit A un compact de E et $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de $f(A)$; $f(A) = \cup_{i\in I} V_i$ alors $A \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Comme A est compact, on peut extraire un recouvrement fini $A \subseteq \cup_{1\leq l\leq l_1} f^{-1}(V_{i_l})$. Par suite $f(A) \subseteq \cup_{1\leq l\leq l_1} V_{i_l}$. Ainsi $f(A)$ est compact. $\square$

Lemme 3.1.7. *Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E de dimension finie et soit d l'une des distances usuelles d_1, d_1 et d_∞ associées à cette base. Soit N une norme quelconque sur E. Alors N est continue pour la distance d.*

Preuve Comme les trois normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie, alors il suffit de traiter le cas d_∞. Pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on a $N(x) = N(\sum x_ie_i) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|N(e_i) \leq k. \max_i(|x_i) = k.||x||_\infty$ dans $\mathbb{R}$ où $k = N(e_1) + \cdots + N(e_n)$. Ainsi N est continue en 0. En utilisant $|N(a)-N(x)| \leq N(x-a)$. On peut en déduire que N est continue en tout point de E. $\square$

Théorème 3.1.8. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Remarque 3.1.1. *Ce théorème justifie pourquoi sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, on utilise indifféremment l'une des trois normes usuelles seulement.*

Proposition 3.1.9. *On note $L(E, F)$ $\big($resp. $L_c(E, F)\big)$ l'espace vectoriel des applications linéaires (resp. linéaires continues) de E dans F.*

Si E est de dimension finie, alors $L(E, F) = L_c(E, F)$.

Preuve Comme $L(E, F) \supset L_c(E, F)$. Montrons que $L(E, F) \subset L_c(E, F)$. D'après l'exercice 1.8.2, il suffit de démontrer qu'application linéaire sur une espace vectoriel de dimension finie E est bornée sur la boule fermée unitée.

Comme toute les normes sont équivalentes si E est de dimensions finie, travaillons avec la norme $||.||_\infty^{(E)}$. Soit $||.||^{(F)}$ une norme sur F (attention, on ne sait pas si les normes de F sont équivalentes). Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, alors $B_f(0, 1) = \{\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k / |\lambda_k| \leq 1\}$ est la boulle unité pour la norme $||.||_\infty^E$. Soit $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in B_f(0, 1)$, alors $||f(x)||^{(F)} =$

$|| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)||^{(F)} \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|.||f(e_k)||^{(F)} \leq \sum_{k=1}^{n} ||f(e_k)||^{(F)}$.
Donc, en posant $M = \sum_{k=1}^{n} ||f(e_k)||^{(F)}$, on a $||f(x)||^{(F)} \leq M, \ \forall x \in B_f(0,1)$. Cqfd. $\square$

Le résultat ci-dessus est faux en général en dimension infinie comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.5. *Montrons que $L(E,F)$ est strictement contenu dans $L_c(E,F)$ lorsque E est un espace de dimension infinie dans le cas suivant. On considère l'application linieaire non continue T de $(\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R},||.||_1\big)$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $T(f) = f(0)$.*

On considère $f_n(x)$ égale à $-nx+1$ sur $[0,\frac{1}{n}]$ et 0 sur $[\frac{1}{n},1]$. On remarque que $(f_n)_n$ converge vers une fonction $g = 0$ (la fonction nulle) et que la suite $(T(f_n))_n$ dans $\mathbb{R}$ ne converge pas vers $T(g) = T(0)$.

3.2 Caractérisation des espaces métriques compacts

Proposition 3.2.1. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments d'un espace métrique compact (X,d) admet au moins une valeur d'adhérence l.*

Définition 3.2.1. *On dit qu'un espace métrique (X,d) est totalement borné (ou précompact) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes $B_o(a_i,\varepsilon)$ $1 \leq I \leq n$ qui recouvrent X : $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_o(a_i,\varepsilon)$.*

Exemple 3.2.1. *Tout espace métrique (X,d) compact est totalement borné.*

Proposition 3.2.2. *Si toute suite $(x_n)_n$ d'éléments d'un espace métrique (X,d) admet au moins une valeur d'adhérence l, alors (X,d) est totalement borné et complet.*

Théorème 3.2.3. *Un espace métrique (X,d) est compact si et seulement s'il est complet et totalement borné.*

Preuve

1. $(\Rightarrow)$ Supposons (X,d) compact, alors le résultat découle des deux propositions précédentes.

2. $(\Leftarrow)$ Réciproquement, supposons que (X,d) est complet et totalement borné.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que E n'est pas compact c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement d'ouverts $U_{i\in I}$ de X qui n'admet pas de sous-recouvrement fini. Soit $k>0$, comme X est totalement borné, il existe un nombre fini de boules ouvertes $B_o(a_{k_i},\frac{1}{2^k})$ $1\leq i\leq n_k$ qui recouvrent X : $X=B_o(a_{k_1},\frac{1}{2^k})\bigcup B_o(a_{k_2},\frac{1}{2^k})\ldots\bigcup B_o(a_{k_{n_k}},\frac{1}{2^k})$. Mais, alors ou moins l'une ces boules $B_o(a_{k_i},\frac{1}{2^k})$ ne peut être recouvert par un nombre fini de U_i. Notons cette boule $B_o(x_k,\frac{1}{2^k})$.

Comme pour $k+1$, on a $X=B_o(a_{(k+1)_1},\frac{1}{2^{k+1}})\bigcup B_o(a_{(k+1)_2},\frac{1}{2^{k+1}})\ldots\bigcup B_o(a_{(k+1)_{n_{k+1}}},\frac{1}{2^{k+1}})$ alors parmi les boules $B_o(a_{(k+1)_i},\frac{1}{2^{k+1}})$ qui recouvrent $B_o(x_k,\frac{1}{2^k})$, il y'en a au moins une qui ne peut être recouvert par un nombre fini de U_i. Notons la $B_o(x_{k+1},\frac{1}{2^{k+1}})$. Ansi de suite on a suite de boules $\left(B_o(x_k,\frac{1}{2^k})\right)_k$, avec $B_o(x_k,\frac{1}{2^k})\bigcap B_o(x_{k+1},\frac{1}{2^{k+1}})\neq\emptyset$, dont aucune ne peut être recouvert par un nombre fini de U_i.

Montrons que $(x_k)_k$ est de Cauchy. Soit $p>q>4$, alors $d(x_p,x_q)\leq\sum_{j=q}^{p-1}d(x_{j+1},x_j)\leq\sum_{j=q}^{p-1}\left(d(x_{j+1},z_j)+d(z_j,x_j)\right)$ où $z_j\in B_o(x_j,\frac{1}{2^j})\bigcap B_o(x_{j+1},\frac{1}{2^{j+1}})$. Donc, on a $d(x_p,x_q)\leq\sum_{j=q}^{p-1}\left(\frac{1}{2^j}+\frac{1}{2^{j+1}}\right)\leq 2\times\frac{1}{2^q}\sum_{j=1}^{p-q}\frac{1}{2^j}\leq 4\times\frac{1}{2^q}(1-\frac{1}{2^{p-q+1}})\leq\frac{1}{2^{q-4}}\overset{q\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. D'où le résultat intermédiaire.
Comme (X,d) est complet alors la suite de Cauchy $(x_k)_k$ converge vers une limite l. L'ouvert U_{i_0} contenant la limite l, contient donc presque tous les centres x_k à partir d'un certian rang N et par conséquent,il existe $k_0>N$ tel que $B_o(x_{k_0},\frac{1}{2^{k_0}})$ soit incluse dans U_{i_0}, ce qui contredit le fait que aucun des $B_o(x_k,\frac{1}{2^k})$ ne peut être recouvert par un nombre fini de U_i. CQFD.

□

On a résume avec les équivalences suivantes. **Soit** (X,d) **est un espace métrique**.

(X, d) est compact=   "Pour tout recouvrement de (X, d) par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$, on peut extraire un recouvrement fini
$\Updownarrow$
Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de (X, d) admet une valeur d'adhérence l
$\Updownarrow$
X est complet et totalement borné
$\Updownarrow$
Pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$, de fermés (X, d) dont l'intersection est vide,   on peut en extraire un nombre fini de fermés dont l'intersection est vide

□

Remarque 3.2.1. *On interprête les résultats de ce tableau comme suit, ce qui justifie notre introduction.*

Le terme de compacité évoque la notion d'étroitesse. Ainsi dans un espace métrique compact, il n'est pas possible de mettre une infinité de points sans qu'ils s'accumulent quelque part ($\Leftrightarrow$ l'existence des valeurs d'adhérences).

L'utilité de la notion de compacité vient du fait qu'elle permet en général, de ramener des problèmes de complexité apparemment infinie à l'étude d'un nombre fini de cas ($\Leftrightarrow$ de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un recouvrement fini).

Corollaire 3.2.4. *Soit X un espace métrique compact.*

1. *Si $(F_i)_{i\in I}$, est une famille de fermés dont toute intersection finie est vide alors l'intersection de la famille $(F_i)_{i\in I}$ est vide.*
2. *Si $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés non vides, alors leur intersection est non vide.*

Preuve Simple.

□

Proposition 3.2.5. *Soit (E, d) un espace métrique et $A, K \subset E$.*

1. *Toute réunion finie de compacts est un compact de X.*

2. *Si E est compact et K est fermée dans E, alors K est compact.*

3. *Si A est compact alors A est fermé et borné dans E.*

Preuve

1. soient $K_1, \ldots, K_2$ n compacts et $U_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de $K_1 \cup \ldots \cup K_n$. Alors $U_{i\in I}$ est un un recouvrement d'ouverts de K_j, $j = 1, \ldots, n$, qui est compact donc il existe une partie finie I_j telle que $U_{i\in I_j}$ recouvre K_j. Par suite $U_{i\in \cup_{1\leq j\leq n} I_j}$ est un recouvrement fini de $K_1 \cup \ldots \cup K_n$.

2. Soit $(x_n)_n$ une suite d'élements de K. Comme X est compact, $(x_n)_n$ admet une sous-suite qui converge vers $x \in E$. Mais K est ferme dans E, donc $x \in K$.

3. Comme A est compact alors A est borné car totalement borné. Montrons que A est fermé. Soit $(x_n)_n)$ dans A convergente vers x dans E. Comme A est compact cette suite admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $l \in A$. Mais alors dans E, on $l = x$ necessairement ainsi, $x \in A$. cqfd.

$\square$

Exemple 3.2.2. $\bigcup_{k>1}[1, 2 - \frac{1}{n}] = [1, 2[$ *on a une réunion infinie de compacts qui n'est pas un compacts.*

Remarque 3.2.2. *Soit (E, d_t) un ensemble infini muni de la métrique discrète d_t. Montrer que E est fermé et borné mais que E n'est pas compact.*

Proposition 3.2.6. *Dans un espace metrique (X, d), l'intersection finie ou infinie de parties compactes est un compact.*

Preuve Soit $(K_i)_{i\in I}$, une famille de compacts de X et soit $i_0 \in I$. L'intersection des K_i est un fermé du compact K_{i_0} , c'est donc un compact. $\square$

Théorème 3.2.7. *Soit (K_i, d_i) avec $1 \leq i \leq n$, n espaces métriques compacts, alors $\prod_{i=1}^{n} K_i$ est compact en tant qu'espace produit.*

Preuve : (Voir le cas général au chapitre 6 sur le théorème de Tychonnoff) $\square$

3.3 Compacité dans les espaces vectoriels normés

Théorème 3.3.1. *Dans un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *La sphère unité est compacte.*
2. *La boule unité fermée est compacte*
3. *Toute boule fermée est compacte.*
4. *Les fermés bornés sont compacts.*

$\square$

Théorème 3.3.2. *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie alors une partie A est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Preuve

On sait qu'une partie compacte dans un espace métrique est fermée et bornée, alors on a le résultat car un evn est un espace métrique.

Réciproquement, on utilise le fait que l'evn E est de dimension finie, n de base $B = (e_1, \dots, e_n)$. Soit φ un isomorphisme linéaire continue

$$\begin{array}{cccc} \varphi & (E, ||.||_{\infty}^{E}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, ||.||_{\infty}^{\mathbb{R}^n}) \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

alors $||\varphi(x)||_{\infty}^{\mathbb{R}^n} = ||x||_{\infty}^{E}, \ \forall x \in E$. Par suite l'image d'une partie fermée et bornée $A \subset E$ est partie fermée et bornée $f(A) \subset^n \mathbb{R}^n$. Or $B = \varphi(A)$ est compact dans $\mathbb{R}$, donc $A = \varphi^{-1}(B)$ est un compact de E car l'image d'un compact par une l'application continue φ^{-1} est un compact. $\square$

Théorème 3.3.3. ***(Riesz : très important)*** *Un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée, est compacte.*

Exemple 3.3.1. ***Contre exemples en dimension infinie*** *Dans $l^{\infty} = \{x = (x_n)_n, \ x_n \in \mathbb{R} / ||(x_n)_n||_{\infty} = \sup_n |x_n| < \infty\}$, la suite $z_m = (z_{n,m})_n$ avec $z_{n,m} = \delta_{n,m}$ (symbole de kronecker), appartient à la boule unité fermée et n'a pas de suite extraite convergente car $d(z_p; z_q) = 1$, si $p \neq q$. Ansi la la boule unité fermé n'est pas compact.*

Exercice 3.3.1. .

1. *Soit* (K_n) *une suite dcroissante de compacts non vides d'un espace métrique* <u>*compact*</u> (X, d). *On pose* $K = \bigcap_n K_n$.
   (a) *Montrer que l'intersection* K *des* K_n *est un compact non vide de* X
   (b) *Soit* U *un ouvert de* X *contenant* K. *Montrer qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $K_n \in U$ *pour tout* $n \geq n_0$.
2. *Soit* $(x_n)_n$, *une suite d'un espace métrique compact* (X, d), *soit* H, *l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite* $(x_n)_n$ *et soit* U *un ouvert contenant* H.
   (a) *Montrer qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0,\ x_n \in U$.
   (b) *On suppose que* $H = \{l\}$. *Montrer que* $(x_n)_n$ *converge vers* l.
   (c) *Application : Soit* (X, d) *un espace métrique,* S^1 *l'ensemble des nombres complexes de module* 1 *et soit* $f : X \to S^1$ *une application continue non surjective. Montrer qu'il existe une fonction* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *continue telle que* $f(x) = e^{i\varphi(x)},\ \forall x \in X$

Exercice 3.3.2. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Soit* G *est une partie de* E, *non vide, et* x *un élément de* E.
On pose $d(x, G) = \inf\{d(x, a)/a \in G\}$.

1. *Soit* A *une partie de* E.
   (a) *Montrer qu'il existe une suite* (a_n) *d'éléments de* A *telle que* $d(x, A) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x, a_n)$
   (b) *En déduire que* $x \in \overline{A}$ *si et seulement si* $d(x, A) = 0$.
2. *Soit* H *une partie de* E. *On munit* $\mathbb{R}$ *de sa distance usuelle* d_u.
   (a) *Montrer que l'application* $f_H : (E, d) \to (\mathbb{R}, d_u) : x \mapsto d(x, H)$ *est* 1*-lipschitzienne.*
   (b) *Soient* A *et* B *deux fermés disjoints de* E. *Montrer qu'il existe deux ouverts* U *et* V *de* E, *disjoints tels que* $A \subset U$ *et* $B \subset V$.
3. *Soient* (E, d) *un espace métrique et* <u>K *un sous-espace métrique compact*</u>.
   (a) *Montrer que* $\forall B \subset X, B \neq \emptyset$, *il existe* $x_0 \in K$ *tel que* $d(K, B) = d(x_0, B)$.
   (b) *Soit* G *une partie fermé de* (E, d) *tel que* $K \cap G = \emptyset$. *Montrer que* $d(K, G) > 0$.

Chapitre 4

Espaces Topologiques, Continuité, Limites et Filtres

Dans ce chapitre et ceux qui vont suivre, on généralise les résultats et propriétés des chapitres précédents.

4.1 Espaces topologiques

4.1.1 Notions de base

Définition 4.1.1. *On appelle espace topologique un couple (X,T) où X est un ensemble et T une famille de parties de X, appelées* ***ouverts****, et vérifiant :*

(O_1) *$\emptyset$ et X sont des ouverts(i.e. $\emptyset,\ X \in T$) ;*

(O_2) *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, c'est-à-dire : si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille avec $U_i \in T$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i \ \in\ T$.*

(O_3) *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert, c'est-à-dire : si $U_1, ..., U_n \in T$, alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i \ \in\ T$.*

Exemple 4.1.1. .

1) Soit (X,d) un espace métrique et $T_d = \{\mathbb{O} \subset X / \forall x \in \mathbb{O}, \exists r > 0,\ B_o(x,r) \subset \mathbb{O}\}$ l'ensemble des ouverts. Alors T_d est une toplogie sur X dite toplogie induite par la *distance d.*

Soit (X, T) un espace topologique. On dit qu' un ***espace toplogique*** *(X, T) est* ***métrisable*** *s'il existe une distance d sur X ayant T comme enesemble des ouverts autrement dit $T_d = T$.*

2) *Soit X un ensemble, non vide.*

   Si $T = \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X, alors T définit une topologie sur X appelé ***topologie discrète****.*

   Si $T = \{\emptyset,\ X\}$, alors T définit une topologie sur X appelé ***topologie grossière****.*

3) *On pose $E = \{a, b, c\}$. Montrer qu'il y'a 29 topologies sur E. Les lister intégralement.*

Définition 4.1.2. *Soit (X, T) un espace topologique. Soit $F \subseteq X$. On dit que F est fermé si C_X^F est un ouvert, c'est-à-dire $C_X^F \in T$.*

Théorème 4.1.1. *Si (X, T) est un espace topologique, alors on a :*

(F_1) *$\emptyset$ et X sont des fermés ;*

(F_2) *Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de fermés, alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un fermé ;*

(F_3) *Si $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de fermés, alors $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé.*

Preuve Simple. □

Exercice 4.1.1. *Soit $X = \{a, b, c, d\}$.*

1) *Montrer que $T_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ définit une topologie sur X. Déterminer les fermés. Donner une partie ni ouverte , ni fermé.*

2) *Montrer que $T_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ ne définit pas une topologie sur X.*

Définition 4.1.3. *Soit (X, T) un espace topologique et soit $x \in X$. Un voisinage de x est un ensemble V_x contenant un ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x : $\mathcal{V}(x) = \{V_x \subseteq X :\ \exists \mathcal{O}_x \in T,\ x \in \mathcal{O} \subseteq V_x\}$*

Exemple 4.1.2. *Dans un espace métrique (X, d),*
$\mathcal{V}_x = \{V_x \subseteq X :\ \exists r > 0, B_o(x, r) \subseteq V_x\}$.

Lemme 4.1.2. *θ est un ouvert de (X,T) si et seulement si θ est un voisinage de chacun de ses points.*

Preuve Simple. □

Lemme 4.1.3. *Soit (X,T) un espace topologique. On note $\mathcal{V} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages des points de X. Alors on a :*

(V_1) *Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subseteq A$, alors $A \in \mathcal{V}(x)$.*

(V_2) *Si $V_1, ..., V_n \in \mathcal{V}(x)$, alors $V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n \in \mathcal{V}(x)$.*

(V_3) *Si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $x \in V$.*

(V_4) *Si $V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \in \mathcal{V}(x) :\ \forall y \in W,\ V \in \mathcal{V}(y)$.*

Important : Ces 4 propritétés sont caractéristiques ; ce qu'on exprime par le théorème suivant.

Théorème 4.1.4. *Soit X un ensemble. Si à chaque $x \in X$, on fait correspondre un ensemble $\widehat{\mathcal{V}}(x)$ de parties de X de sorte que les propriétés (V_1), (V_2), (V_3) et (V_4) soient vérifiées, alors il existe une topologie et une seule sur X telle que pour tout x, $\widehat{\mathcal{V}}(x)$ soit l'ensemble des voisinages de x pour cette topologie.*

Preuve

1. Existence :

   D'après le lemme précédent, on peut définir $T_X = \{\widehat{\mathcal{O}} \subseteq X :\ \forall x \in \widehat{\mathcal{O}},\ \widehat{\mathcal{O}} \in \widehat{\mathcal{V}}(x)\}$.

   — on a bien $\emptyset,\ X \in T_X$.

   — Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de T_X, alors $\bigcup_{i\in I} U_i \in T_X$. En effet, soit $x \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0$ tel que $x \in U_{i_0} \in T_X$. Ainsi, $x \in U_{i_0} \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$ et donc $\bigcup_{i\in I} U_i \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$ d'après (V_1). Par suite, $\bigcup_{i\in I} U_i \in T_X$.

   — Soient $U_1, ..., U_n \in T_X$. Montrons que $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in T_X$. En effet, soit $x \in \bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \Rightarrow x \in U_i \in T_X$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Ainsi $x \in U_i \in \widehat{\mathcal{V}}(x),\ \forall 1 \leq i \leq n$ et donc $x \in \bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$ d'après (V_2). Par suite, $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in T_X$.

   On conclut que T_X est bien une topologie sur X.

2. Montrons que pour T_X, $\forall x \in X$, $\widehat{\mathcal{V}}(x)$ ci-dessus défini est bien l'ensemble des voisinages de x. Soit $\mathcal{V}_{T_X}(x)$ l'ensemble des voisinages pour la topologie T_X. On veut prouver que $\mathcal{V}_{T_X}(x) = \widehat{\mathcal{V}}(x)$.

   $\Rightarrow$) Soit $x \in X$, $\widehat{V}(x)$ un voisinage de x pour T_X ; alors $\exists \mathcal{O} \in T_X : \ x \in \mathcal{O} \subseteq \widehat{V}(x)$. Mais par définition de T_X, $\mathcal{O} \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$. Alors d'après (V_1), on a bien $\widehat{V}(x) \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$. Ainsi, $\mathcal{V}_{T_X} \subseteq \widehat{\mathcal{V}}(x)$.

   $\Leftarrow$) Réciproquement, soit $V \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$. Soit $U = \{y \in X : \ V \in \widehat{\mathcal{V}}(y)\}$. Montrons que $x \in U$, $U \subseteq V$ et $U \in T_X$, ce qui achèvera la preuve.

   — Comme $V \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$, alors $x \in V$; d'après (V_3), donc $x \in U$.

   — Soit $y \in U$ alors $V \in \widehat{\mathcal{V}}(y)$; d'où l'on tire $y \in V$ d'après (V_3). Par suite, $U \subseteq V$.

   — Il faut maintenant montrer que $U \in T_X$.

     Soit $y \in U$; alors $V \in \widehat{\mathcal{V}}(y)$ et donc d'après (V_4), $\exists W \in \widehat{\mathcal{V}}(y)$ tel que $\forall z \in W$, on ait $V \in \widehat{\mathcal{V}}(z)$. Mais par définition de U, $V \in \widehat{\mathcal{V}}(z) \Rightarrow z \in U$. Par suite, $\forall z \in W$, on a $z \in U \Rightarrow W \subset U$.

     Mais $W \in \widehat{\mathcal{V}}(y)$; alors $U \in \widehat{\mathcal{V}}(y)$ d'après (V_1). On conclut que $\forall y \in U$, $U \in \widehat{\mathcal{V}}(y)$, donc $U \in T_X$ par définition.

3. <u>Unicité</u> :

   Soit T_1 une topologie sur X pour laquelle $\forall x \in X$, $\widehat{\mathcal{V}}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x.

   — Soit $\mathcal{O} \in T_1$; alors $\mathcal{O} \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$ $\forall x \in \mathcal{O}$ car un ouvert d'une toplogie est un voisinage de chacun de ses points. Par suite, $\mathcal{O} \in T_X$ par définition de ce dernier donc $T_1 \subseteq T_X$.

   — Réciproquement, soit $\widehat{\mathcal{O}} \in T_X$. Soit $x \in X$; alors $\widehat{\mathcal{O}} \in \widehat{\mathcal{V}}(x)$ par définition de T_X. Donc $\widehat{\mathcal{O}}$ est voisinage de chacun de ses points pour T_1 ; par suite $\widehat{\mathcal{O}} \in T_1$.

$\square$

4.1.2 Systèmes fondamentaux de voisinages et base d'une topologie

Définition 4.1.4. *Dans un espace topologique (X, T), on appelle système fondamental de voisinages(S.F.V) d'un point(resp. d'une partie A de X) tout ensemble σ_x(resp. σ_A) de voi-*

sinages de x(resp. de A) tel que pour tout voisinage de x(resp. de A), il existe un voisinage $W \in \sigma_x$(resp. $W \in \sigma_A$) tel que $W \subset V$.

Exemple 4.1.3. *Si (X,d) est un espace métrique, $\sigma_x = \{B_o(x,r),\ r \in \mathbb{R}_+\}$ est un système fondamental de voisinages de x.*

Définition 4.1.5. *Soit (X,T) un espace topologique. Une partie β de T est appelée base de T si tout élément de T est réunion d'éléments de β.*

Exemple 4.1.4. .

Si σ_x est un S.F.V constitué d'ouverts, alors $\cup_{x \in X} \sigma_x$ est une base de topologie de (X,T). Cas particuliers :

a) *$\beta = \{B_o(x,r),\ r \in \mathbb{R}_+, x \in X\}$ est une base de topologie de l'espace métrique (X,d).*

b) *Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle, alors $\beta_1 = \{]a,b[,\ a \leq b \text{ dans } \mathbb{R}\}$ est une base de topologie.*

Théorème 4.1.5. *Soit β une base d'un espace toplogique (X,T). On a :*

(B_1) $\forall x \in X$, $\forall V_x \in \mathcal{V}(x)$, $\exists B \in \beta :\ x \in B \subseteq V_x$.

(B_2) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$

(B_3) $\forall A, B \in \beta$, $A \cap B$ *est réunion d'éléments de* β.

(B_4) $\forall A, B \in \beta$, $\forall x \in A \cap B$, $\exists B' \in \beta$ *tel que* $x \in B' \subseteq A \cap B$.

Théorème 4.1.6. *Soit X un ensemble et β un ensemble de parties de X vérifiant :*

(S_1) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$;

(S_2) $\forall A, B \in \beta$, $A \cap B$ *est réunion d'éléments de* β.

On pose $T = \{\bigcup_{B \in \beta'} B,\ \beta' \subseteq \beta\}$. Alors T est une topologie sur X de base β.

Preuve.

$(\mathcal{O}_1)$ $\emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B$, $X = \bigcup_{B \in \beta} B$ donc $\emptyset, X \in T$.

$(\mathcal{O}_2)$ Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'éléments de T.

On note $U_i = \bigcup_{B_i \in \beta'_i} B_i$. Alors $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{B_i \in \beta'_i} B_i) = \bigcup_{B \in \beta'} B \in T$, où $\beta' = \bigcup_{i \in I} \beta'_i$.

($\mathcal{O}_3$) Soit $U_1, ..., U_n \in T$. Alors, $\bigcap\limits_{1\leq i\leq n} U_i = \bigcap\limits_{1\leq i\leq n} (\bigcup\limits_{B_i\in\beta'_i} B_i) = \bigcup\limits_{B_1\in\beta'_1,...,B_n\in\beta'_n} B_1\cap B_2\cap ...\cap B_n \in T$ avec $B_1\cap B_2\cap ...\cap B_n$ est une réunion d'éléments de β.

Il est clair que β est une base de T par définition.

□

4.1.3 Intérieur, Adhérence, Frontière et Densité

On généralise les définitions sur les espaces métriques.

Définition 4.1.6. ***(Proposition)*** *Soit (X, T) un espace topologique. Soit $A \subseteq X$.*

1) *$x \in X$ est dit intérieur à A s'il existe $\mathcal{O} \in T$ tel que $x \in \mathcal{O} \subseteq A$. L'intérieur de A, noté est l'ensemble des éléments intérieurs à A. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. A est ouvert ssi $A =\overset{\circ}{A}$.*

2) *$x \in X$ est adhérent à A si $\forall V_x \in \mathcal{V}(x)$, $V_x \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. A est fermé ssi $A = \overline{A}$.*

3) *La frontière de A, notée $\mathrm{fr}(A)$, est $\mathrm{fr}(A) = \overline{A}\setminus \overset{\circ}{A}$.*

4) *Une partie A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*

Exemple 4.1.5. .

1) *Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, si $A =]-\infty, 3] \cup [4, 5[\cup\{7\}\cup]8, 9]$, alors :*
- $A^o =]-\infty, 3[\cup]4, 5[\cup]8, 9[$,
- $\overline{A} =]-\infty, 3] \cup [4, 5] \cup \{7\} \cup [8, 9]$,
- $\mathrm{fr}(A)) = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$,
- *et A n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.*

2) *Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète, si $A = -\infty, 3] \cup [4, 5[\cup\{7\}\cup]8, 9]$, alors :*
- $A^o = \overline{A} = A$.
- $\mathrm{fr}(A) = \emptyset$.

Proposition 4.1.7. *Soit (X, T) un espace topologique. Soient $A, B \subseteq X$. Alors on a :*

1) $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\overset{\circ}{A}\cap \overset{\circ}{B}$.

2) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ *mais la réciproque est fausse en général.*

3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, *mais la réciproque est fausse en général.*

5) $C_X^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}}$ *et* $C_X^{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_X^A}$.

6) $\mathrm{fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_A}$.

Preuve A faire. Donner des contre-exemples pour les cas qui ne sont pas vrai en général
□

Définition 4.1.7. *Soit* (X, T) *un espace topologique et* $A \subseteq X$.

1) *x est un point d'accumulation de A si* $\forall V_x \in \mathcal{V}(x),\ V_x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, *i.e. tout voisinage de x contient un autre point de A différent de x.*

Attention : *x peut ne pas être dans A.*

2) *x est isolé dans A s'il existe un voisinage V_x de x tel que* $V_x \cap A = \{x\}$.

Exemple 4.1.6. *Dans* $\mathbb{R}$, *on considère* $A = \{\frac{-n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$.

— *Comme* $\frac{-n}{2n+1} = \frac{-1}{2}(\frac{2n+1-1}{2n+1}) = \frac{-1}{2}(\frac{2n+1}{2n+1} + \frac{-1}{2n+1}) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2n+1}$, *alors la suite est strictement croissante. Donc tous les éléments de A sont isolés.*

— *Comme* $\lim \frac{-n}{2n+1} = \frac{-1}{2}$, *alors* $\frac{-1}{2}$ *est un point d'accumulation.*

4.1.4 Notions de séparation et séparabilité

On a vu la notion de sépration dans le chapitre 1, on le généralise ici sous différents angles.

Définition 4.1.8. *Un espace topologique X est :*

1. *un espace* $\mathbf{T}_1$ *si pour tous x, y, points distincts de X, il existe un ouvert $\mathbb{O}$, tel que* $y \in \mathbb{O}$, *mais* $x \notin \mathbb{O}$.
2. *un espace* $\mathbf{T}_2$ *(ou* ***séparé*** *ou* ***de Hausdorff****) si pour tous x, y, points distincts de X, il existe deux ouverts,* $\mathbb{O}_x$, *et* $\mathbb{O}_y$, *tels que* $x \in \mathbb{O}_x$, $y \in \mathbb{O}_x$, *et* $\mathbb{O}_x \cap \mathbb{O}_y = \emptyset$.
3. *on dit que X est* ***régulier*** *si pour tout* $x \in X$, *pour tout fermé* $F \in X$, $x \notin F$, *il existe deux ouverts* $\mathbb{O}_x$, *et* $\mathbb{O}_F$, *contenant x, et C respectivement, tels que* $\mathbb{O}_x \cap \mathbb{O}_F = \emptyset$

4. *un espace $\mathbf{T}_3$ si X est $\mathbf{T}_1$, et **régulier**. (On dit également Hausdorff-régulier) ;*

5. *Un espace $\mathbf{T}_4$ (ou **normal**) si X est $\mathbf{T}_1$, et si, étant donnés deux fermés disjoints de X, F_1 et F_2, il existe deux ouverts $\mathbb{O}_1$, et $\mathbb{O}_2$ avec $F_1 \subset \mathbb{O}_1$, et $F_2 \subset \mathbb{O}_2$ tels que $\mathbb{O}_1 \cap \mathbb{O}_2 = \emptyset$.*

   régulier).

6.

Lemme 4.1.8. .

1. *Un espace X est $\mathbf{T}_1$ si et seulement si les singletons $\{x\} \subset X$ sont des fermés.*

2. *Un espace est régulier si et seulement si les voisinages fermés de chaque point constituent une base de voisinages.*

Preuve

1. — Soit $\{x\}$ un singleton dans X. D'après $\mathbf{T}_1$, chaque point du $\{x\}^c$ est contenu dans un ouvert $\mathbb{O}$, ne contenant pas x. Ansi $\{x\}^c$ est ouvert.
   — Réciproquement, on suppose que tout singleton est fermé, et x, y sont deux points distincts de X, alors $\{x\}^c$ est un ouvert contenant y, mais pas x.

2. — Supposons que les voisinages fermés de chaque point constituent une base de voisinages dans X. Soient x et F, comme dans (3). F^c est un ouvert contenant x, donc, d'après l'hypothèse, contient aussi un voisinage fermé, G, de x. On pose $\mathbb{O}_F = G^c$, et on choisit $\mathbb{O}_x$, un voisinage ouvert de x, avec $\mathbb{O}_x \subset G$.
   — Réciproquement, supposons que X est régulier. Soient x un point de X, et $\mathbb{O}$ un voisinage ouvert de x. Comme X est régulier, il existe un ouvert $\mathbb{O}_1$ avec $\mathbb{O}^c \subset \mathbb{O}_1$ et un ouvert $\mathbb{O}_2$ avec $x \in \mathbb{O}_2$ tels que $\mathbb{O}_1 \cap \mathbb{O}_2 = \emptyset$. Et alors, $\mathbb{O}_1^c$ est un fermé contenant $\mathbb{O}_2$ et contenu dans $\mathbb{O}$

Définition 4.1.9. *Un espace topologique (X, T)*

1. *est dit **séparable** si X contient un sous ensemble dénombrable dense.*

2. *satisfait le **premier axiome de dénombrabilité** (D1), si chaque point de X admet une base de voisinages, qui est dénombrable.*

3. satisfait le ***second axiome de dénombrabilité*** *(*D2*), si T est à base dénombrable.*

Exemple 4.1.7.

Tout espace métrique satisfait D1.

Un espace métrique satisfait D2 *si et seulement si il est séparable.*

Tout espace qui satisfait D2 *est séparable.*

4.1.5 Suites généralisées

Ici, on généralise les suites aux espaces non métriques.

Définition 4.1.10. .

Ordre filtrant *: Soit I un ensemble muni d'un ordre $\preceq$ filtrant croissant i.e $\preceq$ est un ordre (partiel) tel que pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $i \preceq k$ et $j \preceq k$.*

Net ou suite généralisée *: Soit (X, T) un espace topologique. Un net (ou suite généralisée) dans X est la donnée d'un couple (x, I), dans lequel I est un ensemble muni d'un ordre filtrant croissant, et x est une application de I dans X. On notera souvent x_i l'élément $x(i)$, et $(x_i)_{i\in I}$ le net x.*

Sous-net *: Soit $(x_i)_{i\in I}$ un net dans X. Un sous-net de $(x_i)_{i\in I}$, est un net $(x_i)_{i\in J}$ dans X, avec $J \subset I$ de sorte que l'ordre hérité de I, est tel que pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$, avec $i \preceq j$.*

On remarque que si I est l'ensemble des entiers naturels, avec l'ordre usuel, ces définitions coincident avec les définitions de suites et de sous-suites.

En se basant sur le cas des suites indexées par $\mathbb{N}$, définir la notion de convergence et de valeurs d'adhérences pour les nets.

4.2 Applications continues

4.2.1 Continuité dans un espace topologique

On généralise la définition du chapitre 1.

Définition 4.2.1. *On dit qu'une application $f : (X, T) \to (X', T')$ est continue en $x_0 \in X$ si : $\forall V'_{f(x_0)} \in \mathcal{V}(f(x_0)), f^{-1}(V'_{f(x_0)}) \in \mathcal{V}(x_0)$.*

Exemple 4.2.1. *(Voir chapitre 1 sur les espaces métriques)*

Proposition 4.2.1. *Soient (X, T), (X', T') et $(X", T")$ trois espaces topologiques, $f : X \to X'$ continue en $x \in X$ et $g : X' \to X"$ continue en $f(x) \in X'$. Alors $h = g \circ f$ de X dans $X"$ est continue en x.*

Preuve Simple □

Définition 4.2.2. *On dit que $f : (X, T) \to (X', T')$ est continue si elle est continue en tout point $x \in X$.*

Exemple 4.2.2. **1)** *L'application identité*

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : (X, T) &\to (X, T) \\ x &\to \mathrm{id}(x) = x \end{aligned}$$

est continue.

2) *L'application constante*

$$\begin{aligned} f_a : (X, T) &\to (X', T') \\ x &\to a \in X' \end{aligned}$$

est continue.

3) *Si (X, T) est un espace discret, toute application $f : (X, T) \to (X', T')$ est continue.*

Théorème 4.2.2. *Soit $f : (X, T) \to (X', T')$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *f est continue sur X.*

2) *$\forall A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

3) *$f^{-1}(F')$ est fermé dans X', $\forall F'$ fermé de X'.*

4) *$f^{-1}(U')$ est ouvert dans X, $\forall U'$ ouvert de X'.*

4.2.2 Homéomorphismes, Application ouverte, fermée

Homéomorphismes

Définition 4.2.3. .

1. *On appelle homéomorphisme de (X,T) sur (X',T') un isomorphisme de la structure topologique de X sur celle de X'.*
   Autrement, dit $f : X \to X'$ est un homéomorphisme si :
   — *f est une bijection ;*
   — *$U \in T \Rightarrow f(U) \in T'$;*
   — *$V \in T' \Rightarrow f^{-1}(V) \in T$.*
2. *S'il existe un homéomorphisme de (X,T) sur (X',T'), on dit que (X,T) et (X',T') sont homéomorphes.*

Définition 4.2.4. *Une propriété P sur un espace toplogique (X,T) est dite propriété topologique, si elle se conserve par homéomorphisme.*

Par exemple, la compacité dans les espaces métriques est une propriété toplogique par contre la complétude ne l'est pas.

Lemme 4.2.3. *$f : X \to X'$ est un homéomorphisme si et seulement si :*

— *f est une bijection ;*

— *F fermé de $X \Rightarrow f(F)$ est un fermé de X' ;*

— *G fermé de $X' \Rightarrow f^{-1}(G)$ est un fermé de X.*

Exemple 4.2.3. *Si (X,T) et (X',T') sont deux espaces discrets, alors toute bijection $\varphi : X \to X'$ est un homéomorphisme.*

Proposition 4.2.4. *Deux topologies T et T' sur un même ensemble X sont égales si et seulement si l'application identité $Id : X \to X'$ est un homéomorphisme de (X, T) sur (X, T').*

Preuve A faire

$\square$

Lemme 4.2.5. *$f : (X, T) \to (X', T')$ est un homéomorphisme si et seulement si f est bijective et f et f^{-1} sont continues.*

Preuve Simple. $\square$

Exemple 4.2.4. .

1. *Soit $I =]a, b[$, $a < b$ dans $\mathbb{R}$.*
   Soit $f : \mathbb{R} \to I : x \mapsto f(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \arctan(x)$. Alors f est un homéomorphisme (donner f^{-1}).
2. *Soit $\overline{f} : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{I} = [a, b]$ où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $\overline{f}(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$, $\overline{f}(\infty) = b$ et $\overline{f}(-\infty) = a$. Alros $\overline{f}$ est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $\overline{I} = [a, b]$*

Application ouverte, application fermée

Définition 4.2.5. *Soient (X, T) et (Y, T') deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite dite ouverte (resp.fermée) si l'image par f d'un ouvert (resp. d'un fermé) de X est un ouvert (resp. un fermé) de Y .*

Exercice 4.2.1. *On considère que $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle.*

1. *Montrer que les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto sin(x)$, et $x \mapsto x^2$ ne sont pas ouvertes.*
2. *Est-ce que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^3$, est ouverte ?. Fermée ?*

Exercice 4.2.2. *Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques.*

1. *Montrer que f est ouverte si et seulement si , pour toute partie $P \subset X$; $f(\overset{o}{P}) \subset \overset{o}{\widehat{f(P)}}$:*
2. *Montrer que f est fermée si et seulement si , pour toute partie $P \subset X$; $\overline{f(P)} \subset f(\overline{P})$:*

4.3 Filtres

La notion de filtre permet de mod{eliser la notion de limite sans disposer d'une topologie sur l'ensemble de départ d'une application comme le cas des suites.

4.3.1 Base de filtre

Définition 4.3.1. *Soient (X,T), (X',T') deux espaces topologiques. Soient $A \subseteq X$, non vide $a \in \bar{A}$ et $f : X \longrightarrow X'$ une application. On dit qu'un élément $l \in F$, est limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans A et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l$ si $\forall V' \in V_{T'}(l), \exists V \in V_T(x) /\ f(A \bigcap V) \subseteq V'$.*

Définition 4.3.2. *On appelle filtre sur un ensemble X, tout sous ensemble Γ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant*

(1) $\Gamma \neq \emptyset$ *et* $\emptyset \notin \Gamma$

(2) *Toute intersection finie d'éléments de* Γ *est un élément de* Γ

(3) *Si* $B \in \Gamma$ *et* $B \subset C$ *alors* $C \in \Gamma$

Exemple 4.3.1. .

(1) $\Gamma = \{X\}$ *est le plus petit filtre sur* X

(2) *Soit* (X,T) *un espace topologique.*

 (2a) *Si* $x \in X$ *alors* $\Gamma = \mathcal{V}(x)$, *l'ensemble des voisinage de* x *est un filtre sur* X, *appelé filtre des voisinages de* x.

 (2b) *Si* $A \subseteq X, A \neq \emptyset, x \in \bar{A}$ *alors* $\Gamma_{A,x} = \{W \subseteq X / \exists V \in \mathcal{V}(x), A \bigcap V \subseteq W\}$ *est un filtre sur* X.

Définition 4.3.3. *On appelle base de filtre sur X ($X \neq \emptyset$) un ensemble β de parties non vides de X, vérifiant :*

(1) $\beta \neq \emptyset, \emptyset \notin \beta$

(2) *Si* $A, B \in \beta, \exists C \in \beta /\ C \subset A \bigcap B$

Exemple 4.3.2. .

(1) *Un filtre est une base de filtre.*

(2) (2a) *Si* (X,T) *est un espace topologique* $x_0 \in X$, *et* $SFV(x_0)$ *est un système fondamental de voisinage de* x_0 *alors* $SFV(x_0)$ *est une base de filtre.*

(2b) *si* $A \subseteq X, A \neq \emptyset, x \in \bar{A}$, *alors* $\beta_{A,x} = \{A \bigcap V, V \in \mathcal{V}(x)\}$ *est une base de filtre sur* X.

(3) *Sur* $\mathbb{N}$, *l'ensemble*

$\beta_8 = \{[n, +\infty[= \{n, n+1, ...\}, n \in \mathbb{N}\}$

est une base de filtre sur $\mathbb{N}$

4.3.2 Limite suivant une base de filtre

Dans ce qui suit, on généralise la notion de limite d'une application en un point sans mettre necessairement une topologie sur l'ensemble de départ, comme c'est le cas lorsqu'on calcule des limites sur les limites.

Définition 4.3.4. *Soient* X *un ensemble non vide,* β *une base de filtre sur* X. *Soient* (X', T') *un espce topologique,* $f : X \longrightarrow X'$ *une application et* $l \in X'$. *On dit que* f *tend vers* l *suivant* β *si* $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists B \in \beta / f(B) \subseteq V$ *on note* $\lim_{\beta} f = l$

Exemple 4.3.3. *si* $X = \mathbb{N}$ *et* $\beta = \{[n, +\infty[, n \in \mathbb{N}\}$ *alors* $\lim_{\beta} f = l \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = l \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N / \forall n \in \mathbb{N}(n \geq \mathbb{N} \Longrightarrow a_n \in V)$ *où* $a_n = f(n)$.

Théorème 4.3.1. *Soient* X *un ensemble muni d'une base de filtre* β, (X', T') *un espace topologique,* $f : X \longrightarrow X'$ *une application et* $l \in X'$. *Soient* $Y \in \beta$ *et* f' *la restriction de* f *à* Y. *Alors* $\beta' = \{B \bigcap Y \neq \emptyset, B \in \beta\}$ *forme une base de filtre de* Y. *Les conditions suivantes sont equivalentes :*

(1) $\lim_{\beta} f = l$

(2) $\lim_{\beta'} f' = l$.

Preuve A faire.

$\square$

Exercice 4.3.1. *Introduire la notion de valeur d'adhérence d'une fonction suivant une base de filtre en généralisant la notion de valeur d'ahérence d'une suite (qui est aussi une application)*

Chapitre 5

Techniques de construction de topologies

5.1 Comparaison de topologies

Définition 5.1.1. *Soient T et T' deux topologies sur X. On dit que T est plus fine que T' et que T' est moins fine que T) si l'application identité* $\mathrm{id} : (X, T) \to (X, T')$ *est continue. Si de plus $T \neq T'$, on dit que T est strictement plus fine que T'(et que T' est strictement moins fine que T).*

NB1 : Deux topologies dont l'une est moins fine que l'autre sont dites **comparables**.

Exemple 5.1.1. — *La topologie discrète est la plus fine des topologies.*

— *La topologie grossière est la moins fine des topologies.*

5.2 Topologie finale

5.2.1 Approche générale

Définition 5.2.1. *Soient Y un ensemble, et $\left(X_i, T_j\right)_{j\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On suppose que pour tout $j \in I$, on a une application $f_j : X_j \to Y$. On appelle topologie finale sur Y pour la famille des f_j* ***la plus fine*** *des topologies sur Y rendant toutes les applications f_j continues.*

Maintenant, si T' est une solution du problème, alors, pour tout j, on a :

*f_j est continue $\Leftrightarrow T' \subset T'_{f_j} = \{B \subset Y / f_j^{-1}(B) \subset T_j\}$. Ansi $T' \subset \bigcap_{j \in J} T'_{f_j}$. On pose $T" = \bigcap_{j \in J} T'_{f_j}$, alors on a une topologie (à vérifier !) et que c'est **la plus fin**e des topologies sur Y rendant tous les f_j continuent.*

5.2.2 Application 1 : Topologie quotient

Définition 5.2.2 (Proposition)**.** *Soit (X, T) un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note par $X/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient associé et $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R} : x \mapsto \overline{x}$ la surjection canonique associée où $\overline{x}$ est la classe de x modulo $\mathcal{R}$.*

*La topologie **la plus fine** sur $X/\mathcal{R}$ rendant $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R} : x \mapsto \overline{x}$ continue est appelée topologie quotient associée à $\mathcal{R}$.*

La topologie quotient est la topologie finale sur $X/\mathcal{R}$ pour la surjection canonique $\pi_{\mathcal{R}}$.

Définition 5.2.3. *Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R} : x \mapsto \overline{x}$. On dit que*

- *$\mathcal{R}$ est fermé si $\pi_{\mathcal{R}}$ est fermé,*
- *$\mathcal{R}$ est ouvert si $\pi_{\mathcal{R}}$ est ouvert.*

Définition 5.2.4. *Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Soit $E \subseteq X$.*

- *Le saturé de E, noté E^*, est*
  $E^* = \{y \in X : \ \exists x \in E, \ y\mathcal{R}x\} = \{y \in X : \ \overline{y} = \overline{x}, \ x \in E\} = \pi_{\mathcal{R}}^{-1} \circ \pi_{\mathcal{R}}(E)$ C'est une réunion disjointe de classes.
- *E est saturé si $E = E^*$.*

Proposition 5.2.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X.*

1) $\pi_{\mathcal{R}}^{-1} \circ \pi_{\mathcal{R}}(E^*) = E^*$.

2) *La réunion et l'intersection de deux ensembles saturés est saturé.*

3) *Le complémentaire d'un ensemble saturé est saturé.*

Preuve A faire. □

Remarque 5.2.1. *Soit (X, T) un espace topologique.*
Les ouverts (resp. les fermés) de $X/\mathcal{R}$ sont les parties A de $X/\mathcal{R}$ telles que $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(A)$ soit

ouvert (resp. fermé) dans X. Autrement dit, les ouverts (resp. les fermés) dans $X/\mathcal{R}$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les parties ouvertes (resp. fermées) dans X saturées par $\mathcal{R}$ et sont les images canoniques de ces ensembles.

Proposition 5.2.2. *Soit (X,T) un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Soit (Y,T) un espace topologique et*
$f : X \longrightarrow Y$ une ***application compatible avec*** *R, c'est-à-dire $f(x) = f(x")$ si $x\mathcal{R}x"$.*
On définit $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ par $\bar{f}(\bar{x}) = f(x), \forall x \in X \Longleftrightarrow f = \bar{f}\circ\pi_{\mathcal{R}}$ où $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R} : x \mapsto \overline{x}$ est la surjection canonique :

1. *f est continue si et seulement si $\overline{f}$ est continue.*
2. *(a) si f est ouvert alors $\overline{f}$ est ouvert.*
   (b) si f est fermé alors $\overline{f}$ est fermé.

Soit $f : (X,T) \longrightarrow (Y,T')$ une application, on définit sur relation d'équivalence sur X par $x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$, alors f est compatible avec $\mathcal{R}$. Les classes d'équivalences de X sont appellés **les fibres** de f, ce sont exactement les $f^{-1}(y)$ quand y décrit $f(X)$.

Pour $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$, les fibres sont les cercles de centre 0, y compris le "cercle" réduit en son centre 0.

5.2.3 Application 2 : Actions de groupes et Topologie quotient

Un exemple important d'ensemble quotient est l'ensemble des orbites de l'action d'un groupe sur un ensemble. Il est important d'étudier les topologies quotients dans ce cadre

Soient G un groupe (noté multiplicativement délément neutre 1_G), X un ensemble non vide, $\mathcal{S}(X)$ le groupe des bijections de X dans X.

Définition 5.2.5. *Une action (à gauche) de G sur X ou opération (à gauche) de G sur X est une application*
$m : G \times X \to X : (g,x) \mapsto m(g,x) = g.x$, vérifiant :

1. *$1_G.x = x, \ \forall x \in X$*

2. *$g'.(g.x) = (g'g).x,\ \forall x \in X,\ g, g' \in G.$*

Dans ces conditions, on dit que G agit (ou opère) sur X à travers m. On dit aussi que m munit X d'une structure de G-ensemble.

Remarque 5.2.2. *Noter que "se donner une action de groupe de G sur X, c'est la même chose que de se donner un morphisme de groupes de G dans $\mathcal{S}(X)$". On peut vérifier cette affirmation comme suit.*

1. *Si $m : G \times X \to X : (g, x) \mapsto m(g, x) = g.x$ est une action de groupe (à gauche) G sur X, alors $\alpha_g : X \to X$ est une bijection pour tout $g \in G$, et l'application $\varphi : G \to \mathcal{S}(X) : g \mapsto \varphi(g) = \alpha_g : x \mapsto g.x$ est un morphisme de groupe de G dans $\mathcal{S}(X)$, associé à m.*
2. *Réciproquement si $\varphi : G \to \mathcal{S}(X) : g \mapsto \varphi(g) = \alpha_g$ est un morphisme de groupe de G dans $\mathcal{S}(X)$, alors l'application $m : G \times X \to X : (g, x) \mapsto m(g, x) = \big(\varphi(g)\big)(x)$ est une action de groupe G sur X, associé à φ.*
3. *Unicité et compatibilité :*
   - *Soit m une action de G sur X, on note φ le morphisme de groupe associé à m, et on note m' l'action associée à φ, alors on a $m = m'$ car $m'(g, x) = (\varphi(g))(x) = g.x = m(g, x)\ \forall g \in G,\ x \in X$.*
   - *Soit φ un morphise de groupe de G dans $\mathcal{S}(X)$, on note m l'action de groupe associé à φ, et on note φ' le morphisme de groupe associé à m, alors on a $\varphi = \varphi'$ car $(\varphi'(g))(x) = m(g, x) = (\varphi(g))(x)$.*

Définition 5.2.6. *Soit X un espace topologique, et G un groupe opérant sur l'ensemble X. On note alors X/G l'espace quotient de X par la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\exists g \in G$ tel que $gx = y$ (action à gauche).*

Nota Bene *: on verra plus loin que si G est muni d'une topologie compatible avec ses opérations internes, **on exigera que l'action** $m : G \times X \to X$ **soit continue**.*

Exemple 5.2.1 (Tore à un trou de dimension n). *Sur $\mathbb{R}^n$, le groupe additif $\mathbb{Z}^n$ y opère par translation et donc définit la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n$. Alors $\overline{x} = x + \mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{R}^n/\mathcal{R}$ se note $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. On l'appelle le tore à un trou de dimension n.*

Exemple 5.2.2. ***Espace projectif*** *On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $X = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ de la topologie induite. Le groupe $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ opère sur $X = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par homothéthie et donc définit la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ dans X ssi $\exists \lambda \neq 0 : \; x = \lambda y$, i.e. que les vecteurs $x = (x_1, ..., x_{n+1})$ et $y = (y_1, ..., y_{n+1})$ sont colinéaires.*
L'espace quotient $X/\mathcal{R} = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ est appelé espace projectif. Il est de dimension n. On le note $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = X/\mathcal{R}$.

Nota bene L'espace projectif joue un rôle centrale en géométrie algébrique.

Exercice 5.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}, n > 1$, on considère le groupe multiplicatif $\{\pm 1\}$ qui opère sur la sphère*
$\mathcal{S}^n = \{(x_i)_{0 \leq i \leq n} / \Sigma_{i=0}^n x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. On note par $\mathbb{P}^n$, l'espace projectif de dimension n.

1. *Montrer que $\pi : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n/\{\pm 1\} : x \mapsto \overline{x}$ est fermé.*
2. *Montrer que $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ est séparé. Pour celà, montrer que q'on peut définir une distance canonique comme suit. Noter $||, ||$ la norme sur $\mathbb{R}^n$, d la distance induite par cette norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\overline{x} \in \mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ alors $\overline{x} = \{x, -x\}$. Comme $||x|| = ||-x||$, alors, montrer qu'on peut définir une distance sur $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ en posant*
   $\widehat{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d(\{x, -x\}, \{y, -y\}) = \inf \big\{ d(u, v) = ||u - v|| / u \in \{x, -x\}, v \in \{y, -y\} \big\}$.
3. *Montrer que $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ est compact*
4. *Montrer qu'on a un homéomorphisme $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{P}^n$.*

5.2.4 Application 3 : Quelques cas typiques de topologie quotient

Nota Bene : Dans les cas qui suivent, il faut imaginer les relations d'équivalence comme permettant d'identifier les points qui sont dans une même classe d'équivalence. Aussi, lorsqu'on définit la relation, on omet généralement d'indiquer les points qui sont seuls dans leur classe d'équivalence.

Cone, Suspension et Ecrasement

Exemple 5.2.3. ***(Cone)*** *Soit X un espace topologique. On définit la relation d'équivalence sur $X \times [0,1]$ par $(x,1)\mathcal{R}_1(x',1)$ pour tout $x, x' \in X$. Donc on a identifié les ponts de $X \times \{1\}$ pour en faire un seul point appelé "sommet". Le cône sur X est l'espace topologique quotient $\mathcal{C}_X = (X \times [0,1])/\mathcal{R}_1$.*

dessin

On peut plonger X dans $\mathcal{C}_X = (X \times [0,1])/\mathcal{R}_1$, par homéomorphisme : si $[(x,y)]$ est la classe d'un élément (x,y) alors $\varphi : X \to Z = \varphi(X) \subset \mathcal{C}_X : x \mapsto [(x,0)]$ est un homéomorphimse par définition des topologies produit et quotient car $\varphi = \pi \circ i$ où $i : X \to X \times [0,1] : x \mapsto (x,0)$ est l'injection canonique et $\pi : X \times [0,1] \to \mathcal{C}_X : (x,0) \mapsto [(x,0)]$ est la surjection canonique.

Si $f : X \to Y$ est une application continue, alors
l'application $\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_Y : [(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$ est continue
car $\mathcal{C}_f \circ \pi_X = \pi_Y \circ i_f$ où $i_f : X \times [0,1] \to Y \times [0,1] : (x,t) \mapsto (f(x),t)$ est continue et $\pi_X : X \times [0,1] \to \mathcal{C}_X : (x,0) \mapsto [(x,0)]$ et $\pi_Y : Y \times [0,1] \to \mathcal{C}_Y : (y,0) \mapsto [(y,0)]$ sont des surjections canoniques continues par définition de la topologie quotient.

De plus si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des applications continues, alors $\mathcal{C}_{g \circ f} = \mathcal{C}_g \circ \mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{Id_X} = Id_{\mathcal{C}_X}$

Exemple 5.2.4. ***(Suspension)***

Soit X un espace topologique. On définit la relation d'équivalence sur $X \times [-1,1]$ par $(x,1)\mathcal{R}_2(x',1)$ et $(x,-1)\mathcal{R}_2(x',-1)$ pour tout $x, x' \in X$. Donc on a identifié les ponts de $X \times \{1\}$ pour en faire un seul point appelé "sommet nord". De même, on a identifié les ponts de $X \times \{-1\}$ pour en faire un seul point appelé "sommet sud" La ***Suspension*** *de X est l'espace topologique quotient $\mathcal{S}_X = (X \times [-1,1])/\mathcal{R}_2$.*

<u>dessin</u>

Comme dans l'exemple ci-dessus, on peut plonger X dans $\mathcal{S}_X = (X \times [-1,1])/\mathcal{R}_2$ par homéomorphisme : si $[(x,y)]$ est la classe d'un élément (x,y) alors $\phi : X \to Z = \phi(X) \subset \mathcal{S}_X : x \mapsto [(x,0)]$ est un homéomorphimse par définition des topologies produit et quotient.

Si $f : X \to Y$ est une application continue, alors
l'application $\mathcal{S}_f : \mathcal{S}_X \to \mathcal{S}_Y : [(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$ est continue

De plus si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des applications continues, alors $\mathcal{S}_{g\circ f} = \mathcal{S}_g \circ \mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_{Id_X} = Id_{\mathcal{S}_X}$

Exemple 5.2.5. ***(Ecrasement)***

Soit X un espace topologique et A une partie de X.

*On définit la relation d'équivalence sur X par $x\mathcal{R}_3x'$ pour tout $x, x' \in A$. Donc, on a identifié les ponts de A pour en faire un seul point appelé "noeud". **L'ecrasement** de X sur A, est l'espace topologique quotient $X/\langle A\rangle = X/\mathcal{R}_3$.*

<u>dessin</u>

On verifie que si A est ouvert ou fermé, alors la restriction π' à $X \setminus A$ de la surjection canonique $\pi : X \to X/\langle A\rangle$ est un homéomorphisme de $X \setminus A$ sur son image $\pi'(X \setminus A)$.

Les quotients des carrés de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$

schemas

Exemple 5.2.6. ***En identifiant les deux extrémités d'un segment on obtient un cercle****. On peut le justifer de la façon suivante.*

Soit $g : [0,1] \to \mathcal{S}^1 = \{(u,v)/u^2+v^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$ *:* $g(\alpha) = \big(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha\big)$*, alors* g *est une application continue et sujective. On définit la relation d'équivalence sur* $[0,1]$ *par* $\alpha\mathcal{R}_4\beta \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta) \Leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathbb{Z}\bigcap[0,1]$ *et on note* $\overline{\alpha}$*, la classe de* α*, alors* $\overline{\alpha} = \{\alpha\}$ *si* $0 < \alpha < 1$ *et* $\overline{0} = \overline{1} = \{0,1\}$*. On définit* $\overline{g}$ *par* $\overline{g}(\overline{\alpha}) = g(\alpha)$ *alors* $\overline{g}$ *est continue et bijective.*

Il reste à vérifier que $\overline{g}$ *est fermé pour conclure que* $\overline{g}$ *est un homéomorphise (car continue et fermé) entre le cercle unité et* $[0,1]/\mathcal{R}_4$ *:* $[0,1]/\mathcal{R}_4 \simeq \mathcal{S}^1$.

Exemple 5.2.7. ***On obtient un tore en identifiant les cotés 2 à 2 parallèles d'un carré***

Le tore peut être redéfini comme quotient de $[0,1]\times[0,1]$ *par les identifications* $(s,0)\mathcal{R}_5(s,1)$ *et* $(0,t)\mathcal{R}_5(1,t)$ *pour tout* $t,s \in [0,1]$*. Noter qu'en identifiant deux cotés paralèles , on a un cylindre puis l'identification des deux autres cotés corespond à l'identification des deux bases du cyclindre alors on obtient naturellement un tore.*

voir schemas

Comme ci-dessus, l'application
$h : [0,1]\times[0,1] \to \mathcal{S}^1\times\mathcal{S}^1 : h(\alpha,\beta) = \big((\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha), (\cos 2\pi\beta, \sin 2\pi\beta)\big)$ *induit un homéomorphisme* $\big([0,1]\times[0,1]\big)/\mathcal{R}_5 \simeq \mathcal{S}^1\times\mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{T}^2$.

Exemple 5.2.8. ***On obtient une sphère en identifiant* 2 *cotés parallèles d'un carré puis en faisant un noeud avec chacun des* 2 *autres cotés***

La Sphère $\mathcal{S}^2 = \{(u,v,w)/u^2+v^2+w^2=1\}$ *peut être redéfini comme quotient de* $[0,1]\times[0,1]$ *par les identifications* $(0,t)\mathcal{R}_6(1,t)$*,* $(s,0)\mathcal{R}_6(s',1)$ *et* $(s,1)\mathcal{R}_6(s',1)$ *pour tout* $t,s,s' \in [0,1]$*. Noter qu'en identifiant deux cotés paralèles , on a un cylindre puis l'écrasement de chaque coté nous donne un objet similaire à une ellipsoïde qui est homéomorphe à une sphère.*

voir schemas

Comme ci-dessus, l'application
$h : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{S}^2$ *:* $h(\alpha, \beta) = \big((\cos 2\pi\alpha. \sin \pi\beta, \sin 2\pi\alpha. \sin \pi\beta, \cos \pi\beta)\big)$ *induit un homéomorphisme* $\big([0,1] \times [0,1]\big)/\mathcal{R}_6 \simeq \mathcal{S}^2$

Exemple 5.2.9. ***Ruban de Möbius : on identifie en sens inversé uniquement 2 cotés parallèles d'un carré***

Le ruban de Möbius, imaginé par le mathématicien allemand A. F. Möbius en 1858, 'a l'âge de 68 *ans, est défini comme le quotient du carré* $[0,1] \times [0,1]$ *par les identificatins (ordre inversé !) :* $(0,t)\mathcal{R}_7(1, 1-t)$.

voir schemas

□

5.2.5 Application 4 : Complétion dans les espaces métriques et Toplogie quotient

Maintenant, comme application de la topologie quotient, on va voir la complétion des espaces métriques, qui joue un rôle essentiel dans beaucoup de domaine en annalyse (contruction de $\mathbb{R}$, de l'intégrable Riemann ou de l'intégrable Lesbegue , ..)

Théorème 5.2.3. *Si* (X, d) *est un espace métrique, il existe un espace métrique* (Y, δ) *complet dont* (X, d) *est un sous-espace dense. Cet espace est unique à isométrie près. On l'appelle le complété ou la complétion de* (X, d).

Preuve.

1) Unicité : Supposons que (X, d) soit un sous-espace dense de deux espaces métriques (Y_1, δ_1) et (Y_2, δ_2) dont les distances δ_1 et δ_2 prolongent d. Le plongement $h : (X, d) \to (Y_2, \delta_2)$ est une isométrie. En particulier elle est uniformément continue. Comme X est dense dans (Y_1, δ_1) et l'espace (Y_2, δ_2) est complet, alors elle se prolonge donc de façon unique en une isométrie de $\overline{h} : (Y_1, \delta_1) \to (Y_2, \delta_2)$.

De même, le plongement $g : (X, d) \to (Y_1, \delta_1)$ est une isométrie. qui se prolonge de façon unique en une isométrie de $\overline{g} : (Y_2, \delta_2) \to (Y_1, \delta_1)$.

On $\overline{g} \circ \overline{h} \mid_X = id_X$. Cette identité se prolonge alors par densité en une application identité (bijective!) isométrique unique $i = \overline{g} \circ \overline{h} : (Y_2, \delta_2) \to (Y_1, \delta_1)$ Comme $\overline{g}$ et $\overline{h}$ sont injectives alors elles sont bijectives. Par suite (Y_2, δ_2) et (Y_1, δ_1) sont identiques.

(2) <u>Existence</u>

On considère $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des suites de Cauchy de (X, d).

(*) Si $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ sont deux suites de Cauchy de X alors $\big(d(x_n, y_n)\big)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. En effet :

$|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)| \le |d(x_p, y_p) - d(x_q, y_p)| + |d(x_q, y_p) - d(x_q, y_q)| \le d(x_p, x_q) + d(y_p, y_q)$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ sont deux suites de Cauchy de X alors, il existe $N_\varepsilon >$ tel que $p, q > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon/2$ et $d(y_p, y_q) < \varepsilon/2$. Donc, $|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)| \le \varepsilon$, pour $p, q > N_\varepsilon$.

Ansi, la suite $\big(d(x_n, y_n)\big)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge.

On pose alors $\delta(x, y) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$. Par passage à la limite, en utilisant les propriétés de d, on a pour tout $x, y, z \in \mathcal{C}(X)$: $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ et $\delta(x, z) \le \delta(x, y) + \delta(z, y)$

Mais $\delta(x, y) = 0 \not\Rightarrow x = y$, car on peut avoir <u>deux suites de Cauchy distinctes qui convergent vers la même limite dans $\mathcal{C}(X)$,</u> donc δ ne définit pas une distance sur $\mathcal{C}(X)$. On résoud le problème, on définissant une relation d'équivalenece qui permettra d'identifier deux suites Cauchy ayant même limite dans $\mathcal{C}(X)$.

On pose $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow \delta(x, y) = 0$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

et on pose $\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}$, on note $\overline{x}$ la classe d'une suite de cauchy x et on définit

$$\overline{\delta} : \ \big(\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}\big) \times \big(\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}\big) \ \longrightarrow \ \mathbb{R} : (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{\delta}(\overline{x}, \overline{y}) = \delta(x, y)$$

1. <u>Montrons que $\overline{\delta}$ est une application</u>

   On a $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x'}, \overline{y'}) \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{x'}, \ \ \overline{y} = \overline{y'} \Leftrightarrow \delta(x, x') = 0, \ \delta(y, y') = 0$.

   D'où, d'après les inégalités ci-dessus, $\delta(x, y) \le \delta(x, x') + \delta(x', y') + \delta(y', y) = \delta(x', y')$

et inversement $\delta(x', y') \leq \delta(x, y)$,

ainsi $\overline{\delta}(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{\delta}(\overline{x'}, \overline{y'})$

2. Montrons que $\overline{\delta}$ est une distance.

   (*) $\overline{\delta}(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$

   (**) La symétrie et l'inégalité triangulaire découlent des relations sur δ données ci-dessus.

3. Montrons que X s'injecte canoniquement dans $\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}$.

   Soit a une constatnte de X, on lui associe la suite contante $x_{[a]} = (x_{a,k})_k \in \mathcal{C}(X)$ avec $x_{a,k} = a\ \forall k \in \mathbb{N}$. On définit l'injection canonique $j : X \to \mathcal{C}(X)/\mathcal{R} : a \mapsto \overline{x_{[a]}}$.

   L'injection canonique est une isométrie car $\overline{\delta}(\overline{x_{[a]}}, \overline{x_{[b]}}) = \delta(x_{[a]}, x_{[b]}) = d(a, b)$

4. Montrons que $\left(\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}, \overline{\delta}\right)$ est complet.

   Soit $(\overline{x^n})_n$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}, \delta)$. Noter que chaque x^n est un élément de $\mathcal{C}(X)$ donc est une suite de Cauchy de X. En prenant des représentants cela revient à considérer une suite $(x^n)_n$ de $\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}$ telle que

   $\forall \varepsilon > 0$ et il existe $M_\varepsilon > 0$ tel que $n, m > M_\varepsilon \Rightarrow \delta(x^n, x^m) < \varepsilon$.

   (a) Posons $x^n = (x^n_k)_k$, alors il existe k_n, tel que $k, k' > k_n,\ d(x^n_k, x^m_{k'}) < \frac{1}{n+1}$.

   Procédé diagonal : On considère la suite $x = (x^n_{k_n})_n$ de X.

   (b) Montrons que $x = (x^n_{k_n})_n \in \mathcal{C}(X)$ Pour $m, n, k \in \mathbb{N}$, on a :

   $d(x^n_{k_n}, x^m_{k_m}) \leq d(x^n_{k_n}, x^n_k) + d(x^n_k, x^m_k) + d(x^m_k, x^m_{k_m})$.

   Pour $k \geq \max(k_n, k_m)$, on a : $d(x^n_{k_n}, x^m_{k_m}) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + d(x^m_k, x^m_{k_m})$.

   Pour $\varepsilon > 0$ il existe $M_\varepsilon > 0$ tel que $\delta(x^n; x^m) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ pour $m, n > M_\varepsilon$.

   Pour de tels m et n on a alors par définition de δ, $d(x^n_k k; x^m_k k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour k assez grand.

   Ainsi, on obtient $d(x^n_{k_n}, x^m_{k_m}) \leq \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{m+1} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Donc, on peut trouver $M"_\varepsilon > 0$ tel que pour $n, m > M"_\varepsilon$, on ait $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{4}$ et $\frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{4}$ ce qui donne $d(x^n_{k_n}, x^m_{k_m}) \leq \varepsilon$.

   Par suite $x = (x^n_{k_n})_n \in \mathcal{C}(X)$ c'est-a-dire est de Cauchy comme recherché.

   Pour la suite récrivont $x = (x^j_{k_j})_j) = (x_j)_j$

(c) Maintenant montrons qu'on a : $\lim_{n\to+\infty} \overline{x^n} = \overline{x} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \delta(x^n, x) = 0$.

Rappelons que $\delta(x^n, x) = \lim_{j\to+\infty} d(x_j^n, x_j)$.

On a $d(x_j^n, x_j) \leq d(x_j^n, x_n) + d(x_n, x_j) = d(x_j^n, x_{k_n}^n) + d(x_n, x_j)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Avec les notations précédentes, on a pour $n > M"_\varepsilon$ et $j > \max(k_n, M"_\varepsilon)$, $d(x_j^n, x_j) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Par passage à la limite suivant j, on a :

$\forall n > M"_\varepsilon, \quad \delta(x^n, x) = \lim_{j\to+\infty} d(x_j^n, x_j) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Par suite pour $n > E(\dfrac{1}{\varepsilon})$, on a $\delta(x^n, x) \leq 2\varepsilon$. Cfd.

5. Il reste à prouver que X est dense dans $\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}$.

Soit $\overline{x}$ est un élément quelconque de $\mathcal{C}(X)/\mathcal{R}$, on prend un représentant $x = (x_n)_n$ dans $\mathcal{C}(X)$ et on considère la suite de suites constantes $(x_{[x_n]})_n$ (la classe de la suite diagonale des suites constantes $x_{[a]} \in \mathcal{C}(X)$ s'identifiant avec l'élément a de X d'après l'injection canonique ci-dessus. On a alors $\delta(x_{[x_n]}, x) = \lim_{k\to+\infty} d(x_n, x_k) < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ et $n > M_\varepsilon$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{x_{[x_n]}} = \overline{x}$ dans $\big(\mathcal{C}(X)/\mathcal{R},\ \overline{\delta}\,\big)$.

$\square$

Applications

1. On a vu que $\mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ muni de la norme $||f||_1 = \int_0^1 f(t)dt$ n'est pas complet avec la suite donnée par $f_n(x) = x^n$. Le Théorème ci-dessus dit de façon abstraite qu'il existe un complétion de cette espace.

2. Un des objectifs de la Théorie de la Mesure et de l'Intégration est d'identifier ce complété comme un espace de "fonctions". Le résultat (cf. votre cours d'Intégration) est que ce completé est $\mathbb{L}^1([0,1], dx)$, l'espace des fonctions intégrables quotienté par la relation d'équivalence "égalité presque partout".

3. Cas général des epaces $\mathbb{L}^P$. Si $p \in [1, \infty[$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{E})$ l'espace vectoriel des fonctions μ-mesurables sur $(E, \mathcal{E})$, à valeurs réelles où $\mathcal{E}$ est une tribu sur un ensemble non vide E et μ une messure sur $\mathcal{E}$, telles que la fonction $|f|^p \quad \big(f \in \mathcal{L}^p\big)$, soit μ-intégrable $\Leftrightarrow \int |f|^p d\mu < +\infty$. De plus, grâce à la linéarité de l'intégrale, deux fonctions $f, g \in \mathcal{L}^p$ ont même intégrale si et seulement si elles sont égales μ presque partout (p.p) : on note $f = g\ \mu - p.p.$

Si $f \in \mathcal{L}^p$, on pose $||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$,

alors $||.||_p$ vérifie les propriétés d'une norme sauf une, car $||f||_p = 0 \Leftrightarrow f = 0,\ \mu - p.p$.

Pour pallier ce problème, on opère ainsi : d'abord, si f et g sont deux fonctions réelles mesurables, on écrit $f\mathcal{R}g$ si et seulement si $f = g\ \mu - p.p$, ce qui définit clairement une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p$.

On pose $\mathbb{L}^p = \mathcal{L}^p/\mathcal{R}$. Alors $\mathbb{L}^p$ est espace vectoriel quotient dont la topologie quotient est issue d'une norme $\big($noté encore $||f||_p\big)$ qui un prolongement de la pseudo-norme $||f||_p$ sur $\mathcal{L}^p$. En faite c'est un espace de Banach (evn complet). Enfin, on vérifie que $\mathcal{L}^p$ s'injective sur une partie dense de $\mathbb{L}^p$.

5.2.6 Application 5 : Topologie somme disjointe

Définition 5.2.7. ***(proposition)***

Soit $X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On dit qu'un ensemble X muni d'applications $f_i : X_i \to X$ est une somme (ou union) disjointe des X_i si pour tout ensemble Y muni d'applications $g_i : X_i \to Y$, il existe une unique application $\phi : X \to Y$ telle que $\phi \circ f_i = g_i$ pour tout i.

L'ensemble $X = \{(x_i, i)/i \in I,\ x_i \in X_i\}$ muni des applications $f_i : X_i \to X : x_i \mapsto f_i(x_i) = (x_i, i)$ convient et il est unique modulo une bijection conservant $\phi \circ f_i = g_i$ pour tout i. On note alors $X = \coprod_{i\in I} X_i$.

*La topologie finale sur $X = \coprod_{i\in I} X_i$ muni de la famille $(f_i)_{i\in I}$, est appelée la **topologie somme disjointe**.*

5.2.7 Application 6 : Topologie limite inductive

Définition 5.2.8. ***(proposition)*** *Soit I un ensemble muni d'un ordre $\preceq$ filtrant croissant (i.e que pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $i \preceq k$ et $j \preceq k$) ; pour tout $i \in I$, soit X_i un espace topologique ; $f_{ji} : X_i \to X_j$ une application continue pour tous i, j, tels que $i \preceq j$; et supposons $f_{ii} = id$ si $i \in I$ et $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$ si $i \preceq j \preceq k$. Un système $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{ij})\big)$ vérifiant* *ces hypothèses, est appelé* ***système indutif d'espaces topologiques****.*

On pose $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$*, l'espace topoplogie "union ou somme disjointe" des* X_i*. On définit une relation d'équivalence sur* $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$*, comme suit : pour* $x_i \in X_i$ *et* $x_j \in X_j$ *on pose* $x_i \mathcal{R} x_j \Leftrightarrow \exists k \in I / i \preceq k, j \preceq k,\ f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j)$*. On note l'esapce quotient qui en résulte par* $\varinjlim X_i = \left(\bigsqcup_{i\in I} X_i\right)/\mathcal{R} = X/\mathcal{R}$*.*

Pour tout $t \in I$*, soient* $h_t : X_t \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$ *l'injection canonique classique et* $p : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to \varinjlim X_i : x \mapsto \overline{x}$*. On note* $f_t = p \circ h_t : X_t \to \varinjlim X_i$ *alors elle vérifie* $f_t \circ f_{tj} = f_j$ *pour* $j \preceq t$*.*

La topologie finale sur $\varinjlim X_i$ *definie par* $(f_i)_{i\in I}$ *est appelée la* ***topologie limite inductive****. Sauf mention contraire, l'ensemble* $\varinjlim X_i$ *sera muni de cette topologie. Donc, la topologie limite inductive est la topologie la plus fine rendant continue les applications* $f_i : X_i \to \varinjlim X_i$ *; c'est aussi par construction la topologie quotient* $\varinjlim X_i = \left(\bigsqcup_{i\in I} X_i\right)/\mathcal{R} = X/\mathcal{R}$*.*

.

Exemple 5.2.10. *Soit* $(X_n, T_n)_n$ *une suite croissante d'espaces toplogiques. On pose* $X = \bigcup_n X_n$*, telle qu'on ait la restriction de topologie suivante* $T_{n+1}|X_n = T_n$*. Si* $n \leq m$*, notons* $f_{mn} : X_n \to X_m$ *l'inclusion canonique. Alors,* $\big((X_n)_n, (f_{m,n})\big)$ *est un système inductif d'espaces topologiques, et on note* $f_n : Xn \to \varinjlim X_n$ *l'application associée comme ci-dessus.*

On identifie X *avec* $\varinjlim X_n$ *par la bijection de* $\varphi : X \to \varinjlim X_n : x \to f_n(x)$ *si* $x \in X_n$*. Vérifier que* $f_n^{-1}(A) = A \bigcap X_n$*.*

C'est l'exemple le plus fréquent de topologie limite inductive que l'on rencontre.

5.3 Topologie Initiale

5.3.1 Approche générale

Définition 5.3.1. *Soient* X *un ensemble, et* $\left(Y_i, T'_i\right)_{i\in I}$ *une famille d'espaces topologiques. On suppose que pour tout* $i \in I$*, on a une application* $f_i : X \to Y_i$*. On appelle* ***topologie initiale=toplogie de l'ensemble de départ*** *sur* X *pour la famille des* f_i*,* ***la moins fine (=la plus petite)*** *des topologies sur* X *rendant toutes les applications* f_i *continues.*

Maintenant, si T est une solution du problème, alors $f_i^{-1}(T') \subset T \Rightarrow \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(T') \subset T$; et comme $Z = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(T')$ est une topologie sur X, c'est alors ***la moins fine (=la plus petite)*** *des solutions, donc $Z = T_{(f_i)_{i\in I}} := \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(T')$ est la solution cherchée.*

Une base de Z est

$\beta = \{B \subset X / \exists\ J$ *fini inclus dans* I *et* $(\theta_i)_{i\in J}$ *avec* $\theta_i \in T_i'$: $B = \bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(\theta_i)\}$

5.3.2 Application 1 : Topologie induite

Définition 5.3.2 (Proposition).
Soient (X,T) un espace topologique et $A \subseteq X$. La topologie T_A sur A ***la moins fine*** *rendant continue l'inclusion canonique* $\mathrm{i} : (A, T_A) \to (X,T) : x \mapsto x$ *est appelée topologie induite sur X par T.* ***La topologie induite sur A par celle de X est la topologie initiale pour l'inclusion canonique*** i. *On a : $T_A = \{\mathcal{O} \cap A,\ \mathcal{O} \in T\}$.*

Exemple 5.3.1. *Un sous-espace métrique (X', d') d'un espace métrique (X,d) est muni de la topologie induite.*

Proposition 5.3.1. *Soit (X,T) un espace topologique et $A \subseteq X$.*

(1) *Les fermés de T_A sont de la forme $F_A = F \cap A$ où F est un fermé de T.*

(2) *Pour $x \in A$, un voisinage de x dans A est de la forme $V_{x,A} = V_x \cap A$ où V_x est un voisinage de x dans X.*

(3) *Si $B \subseteq A \subseteq X$, la topologie induite par T_A sur B n'est rien d'autre que la topologie T_B induite par T sur B.*

Preuve 5.3.1. *Simple.*

5.3.3 Application 2 : Topologie produit

Définition 5.3.3 (Proposition). *Soit (X_i, T_i) une famille d'espaces topologiques quelconques, non vides.*
On pose $X = \prod_{i\in I} X_i$; on note par $\mathrm{pr_i} : X \to X_i : x = (x_j)_{j\in I} \mapsto \mathrm{pr_i}(x) = x_i$ la i-ème projection canonique. La topologie ***la moins fine*** *sur X qui rend les projections canoniques $\mathrm{pr_i} : X \to X_i$ continues, est appelée topologie produit des $(X_i)_{i\in I}$.*

***La topologie produit sur** X **est la topologie initiale pour la famille des projections canoniques** $(\mathrm{pr_i})_{i\in I}$ **sur** X.*

Remarque 5.3.1. .

1) *Soit $X=\prod_{i\in I} X_i$. Les ouverts élémentaires sont de la forme $\mathcal{O}=\prod_{i\in I}\mathcal{O}_i$ où $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de X_i et de plus $\mathcal{O}_i\neq X_i$ sauf pour un nombre fini. Si $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de X_i alors $\mathrm{pr_i}^{-1}(\mathcal{O}_i)=\mathcal{O}_i\times\prod_{j\in I, j\neq i} X_j$. Ansi connaissant les $\mathcal{O}_i\neq X_i$ pour un ouvert $\mathcal{O}$, on a $\mathcal{O}=\bigcap_{\mathcal{O}_i\neq X_i}\mathrm{pr_i}^{-1}(\mathcal{O}_i)$.*

2) *Si I est fini, posons $I=[1,n]$ alors les ouverts élémentaires de $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n=\prod_{i=1}^{n} X_i$ sont de la forme $\mathcal{O}=\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\ldots\times\mathcal{O}_n$ où $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de X_i.*

Proposition 5.3.2. *Soit (X,T) un espace topologique et $(Y_i,T_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On pose $Y=\prod_{i\in I} Y_i$ et $P_{ri}:Y\longrightarrow Y_i$ les projections canonique.*

Pour que $f:X\longrightarrow Y$ soit continue il faut et il suffit que toutes les composantes $f_i=P_{ri}\circ f:\ f_i:X\longrightarrow Y_i$ soient continues.

Exemple 5.3.2. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4:x\mapsto\big(\sin(x^2+1),2x+3,\exp(-x),\exp(x\sin x)\big)$. Comme les fonctions composantes $x\mapsto\sin(x^2+1)$, $x\mapsto 2x+1$, $x\mapsto\exp(-x)$ et $x\mapsto\exp(x\sin x)$ sont continues alors f est continue.*

Définition 5.3.4. *Soit $X=\prod_{i\in S} X_i$ un produit d'ensembles et X' un ensemble. Soit $f:X\longrightarrow X'$ une application. Pour $(a_i)_{i\in I}$ et $J\subseteq I$ on note f_{aJ} l'application dite partielle définie par : $f_{aJ}:\prod_{i\in I\setminus J} X_i\longrightarrow X'$ et $f_{aJ}(x)=f(y)$ avec*

$$y_i=\begin{cases} x_i & si\quad i\notin J\\ a_i & si\quad i\in J\end{cases} \tag{5.1}$$

Lemme 5.3.3. *soit $(X_i,T_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On pose $X=\prod_{i\in I} X_i$*
Si $f:X\longrightarrow X'$ est continue au point $a=(a_i)_{i\in I}$, alors pour tout $J\subseteq I$ l' application partielle f_{aJ} est continue au point $a_J=(a_i)_{i\in I\setminus J}$

Preuve : Pour $i\in I$, on pose $Y_i=X_i$. Si $i\notin J$ et $Y_i=\{a_i\}$. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\phi_J : \prod_{i\in I\setminus J} Y_i &\longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i \\ x_J &\longrightarrow y\end{aligned}$$

avec $x_J = (x_i)_{i\in I\ J}$

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad i \notin J \\ a_i & \text{si} \quad i \in J \end{cases} \tag{5.2}$$

alors ϕ_J est continue et comme $f_{aJ} = fo\phi_J$ on déduit que f_{aJ} est continue.

□

Exemple 5.3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \sin(x^2 + 1) + 2y + \exp(z \cos z)$. Comme*

— *les fonctions composantes $f_1 : x \mapsto \sin(x^2+1)$, $f_2 : y \mapsto 2y$ et ${}_3f = z \mapsto \exp(-x)$ sont continues*

— *$h = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) :\mapsto \big(f_1(x), f_2(y), f_3(z)\big)$ est continue d'aprés le cas ci-dessus,*

— *et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x + y + z$ est continue (facile a vérifier),*

— *alors $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f = g \circ h$ est continue.*

Remarque 5.3.2. *La réciproque de ce lemme est faux. Pour cela, considérons $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$*

On sait que $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ donc les fonctions partielles $f(., 0), f(0, .)$ sont continues. Mais, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on a $f(x, \alpha x) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \neq 0$, si $x \longrightarrow 0$. Ainsi, f n'est pas ocntinue en 0.

5.3.4 Application 3 : Ensemble de Cantor et Homéomorphisme

Développement en base b des nombres réelles

On fixe un entier $b \geq 2$. La série de terme général $\dfrac{1}{b^{n+1}}$ est convergente et $\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{b-1}{b^{i+1}} = 1$. Ainsi pour toute suite $(a_i)_{i\geq 0} \in \{0, \ldots, b-1\}^{\mathbb{N}}$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{a_i}{b^{i+1}}$, converge sur $[0, 1]$.

Théorème 5.3.4. *L'application $f : \{0, \ldots, b-1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1] : \overline{a} = (a_i)_{i\geq 0} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{a_i}{b^{i+1}}$, est continue et surjective sachant que $\{0, \ldots, b-1\}$ est muni de la topologie discrète, $\{0, \ldots, b-1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit et $[0, 1]$ de la topologie usuelle induite par celle de $\mathbb{R}$.*

Preuve

— Continuité : Soit $y = f(\overline{a}) = f\big((a_i)_{i\geq 0}\big)$ et $B_o(y,r) \subset [0,1]$, $(r > 0)$ une boule ouverte. Soit N_r un entier tel que $\dfrac{1}{b^{N_r+1}} < r$ et posons $U = \prod_{i=0}^{N_r-1}\{a_i\} \times \prod_{i\geq N_r} X_i$ où $X_i = \{0,\dots,b-1\}$, c'est-à-dire, U est l'ensemble des suite dont les N_r premiers termes (fixés) sont $a_0, a_1, \dots, a_{N_r-1}$. Comme les $\{a_i\}$ et X_j sont ouverts alors U est un ouvert. Montrons que $f(U) \subset B_o(y,r)$. Soit $\overline{c} = (c_i)_{i\geq 0} \in U$, alors
$|f(\overline{a}) - f(\overline{c})| = \big|\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{a_i}{b^{i+1}} - \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{c_i}{b^{i+1}}\big| = \big|\sum_{N_r}^{+\infty} \dfrac{a_i}{b^{i+1}} - \sum_{i=N_r}^{+\infty} \dfrac{c_i}{b^{i+1}}\big|$
$\leq \dfrac{1}{b^{N_r}} \sum_{i=0}^{+\infty} \big|\dfrac{a_{i+N_r} - c_{i+N_r}}{b^{i+1}}\big| \leq \dfrac{1}{b^{N_r}} \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{b-1}{b^{i+1}} \leq \dfrac{1}{b^{N_r}} < r$ car $\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{b-1}{b^{i+1}} = 1$.

— Surjection : Soit $y \in [0,1]$ montrons qu'il existe $\overline{a} = (a_i)_{i\geq 0} \in \{0,\dots,b-1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $y = f(\overline{a})$. Si $y = 1$, on pose $a_0 = b-1$, si non on pose $a_0 = E(by)$ alors $0 \leq y - \dfrac{a_0}{b} \leq \dfrac{1}{b}$. On pose $y_1 = y - \dfrac{a_0}{b}$. Si $y_1 = 1$, on pose $a_1 = b-1$, si non on pose $a_1 = E(b^2 y_1)$ alors $0 \leq y_1 - \dfrac{a_1}{b^2} \leq \dfrac{1}{b^2} \Leftrightarrow 0 \leq y - \sum_{i=0}^{1} \dfrac{a_i}{b^{i+1}} \leq \dfrac{1}{b^2}$.
Par recurrence, on consruit une suite $(a_k)_k$ telle que :
si $y - \sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{a_i}{b^{i+1}} = 1$, on pose $a_k = b-1$, si non on pose $a_k = E\big[b^{k+1}\big(y - \sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{a_i}{b^{i+1}}\big)\big]$ alors $0 \leq y - \sum_{i=0}^{k} \dfrac{a_i}{b^{i+1}} \leq \dfrac{1}{b^{k+1}}$. En faisant tendre k ver l'infini, on tire $y = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{a_i}{b^{i+1}}$

□

Définition 5.3.5. *Si $y \in [0,1]$ l'écriture $y = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{a_i}{b^{i+1}}$ dans la preuve ci-dessus est appelé développement b-adique de y.*

Lemme 5.3.5. *Si $\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{a_i}{b^{i+1}} = 1$ alors $a_i = b-1$ pour tout $i \geq 0$.*

Preuve Raisonnons par l'absurde. Sipponsons qu'au moins l'un des a_i soit distinct de $b-1$ et notons alors a_N le premier entier tel que $a_N < b-1$. Alors, on a :
$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^{i+1}} \leq \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_i}{b^{i+1}} + \frac{b-2}{b^N} + \sum_{i>N}^{+\infty} \frac{a_i}{b^{i+1}} \leq \sum_{i=0}^{N-1} \frac{b-1}{b^{i+1}} + \frac{b-2}{b^N} + \sum_{i>N}^{+\infty} \frac{b-1}{b^{i+1}}$$
$$\leq \frac{b^N-1}{b^N} + \frac{b-2}{b^{N+1}} + \frac{1}{b^{N+1}} = \frac{b^{N+1}-1}{b^{N+1}} < 1$$

□

Lemme 5.3.6. *Tout nombre réel y de $[0,1]$ admet au plus 2 développements b-adiques. Plus précisément*

1. *si y ne possède pas de développement b-adique fini, il possède un unique développement b-adique ;*

2. *si y possède un développement b-adique fini, il possède alors exactement deux développements b-adiques, un fini et l'autre infini. Si $y=\sum_{i=0}^{N}\frac{a_i}{b^{i+1}}$ avec $a_N\geq 1$, est le développement b-adique fini, alors le développement b-adique infini de x est donné par $y=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{a_i}{b^{i+1}}+\frac{a_N-1}{b^{N+1}}+\sum_{i=N+1}^{+\infty}\frac{b-1}{b^{i+1}}$.*

Preuve

1. Raisonnons par l'absurde. Supposons que y ait deux développements b-adiques distincts $y=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a_i}{b^{i+1}}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c_i}{b^{i+1}}$.

   Soit N le plus petit entier tel que $a_N\neq c_N$. Quitte à permuter, on peut supposer que $a_N\geq c_N+1$. On a :

   $0=\left|\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a_i-c_i}{b^{i+1}}\right|=\left|\frac{a_N-c_N}{b^{N+1}}+\sum_{i=N+1}^{+\infty}\frac{a_i-c_i}{b^{i+1}}\right|\geq\frac{a_N-c_N}{b^{N+1}}-\left|\sum_{i=N+1}^{+\infty}\frac{a_i-c_i}{b^{i+1}}\right|$
   $\geq\frac{1}{b^{N+1}}\big(a_N-c_N-\left|\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a_{N+1+i}-c_{N+1+i}}{b^{i+1}}\right|\big)$.

   Par suite $a_N-c_N\leq\left|\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a_{N+1+i}-c_{N+1+i}}{b^{i+1}}\right|$, mais
   $\left|\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a_{N+1+i}-c_{N+1+i}}{b^{i+1}}\right|\leq\sum_{i=0}^{+\infty}\left|\frac{a_{N+1+i}-c_{N+1+i}}{b^{i+1}}\right|\leq\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{b-1}{b^{i+1}}\leq 1.$

   D'où, $a_N-c_N\leq 1$ ansi on a $a_N=c_N+1$, on déduit que $\sum_{i=0}^{+\infty}\left|\frac{a_{N+1+i}-c_{N+1+i}}{b^{i+1}}\right|=1.$

   Alors d'après le lemme précédent, on a : $|a_{N+1+i}-c_{N+1+i}|=b-1$ pour tout i. Ansi pour tout i, on soit $a_{N+1+i}=0$ (et donc $c_{N+1+i}=b-1$), soit $a_{N+1+i}=b-1$ (et donc $c_{N+1+i}=0$).

   Supposons que l'un des c_{N+1+i} soit distinct de $b-1$, alors $\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c_{N+1+i}}{b^{i+1}}<1$ d'après le lemme précédent. On a donc :
   $\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c_i}{b^{i+1}}=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{c_i}{b^{i+1}}+\frac{c_N}{b^{N+1}}+\frac{1}{b^{N+1}}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c_{N+1+i}}{b^{i+1}}<\sum_{i=0}^{N-1}\frac{c_i}{b^{i+1}}+\frac{c_N}{b^{N+1}}+\frac{1}{b^{N+1}}$

   Mais, on sait que $a_i=c_i,\ 0\leq i\leq N-1$ et $a_N=c_N+1$, alors :
   $\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a_i}{b^{i+1}}=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{a_i}{b^{i+1}}+\frac{a_N}{b^{N+1}}+\frac{1}{b^{N+1}}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a_{N+1+i}}{b^{i+1}}\geq\sum_{i=0}^{N-1}\frac{c_i}{b^{i+1}}+\frac{c_N+1}{b^{N+1}}.$

   On déduit :$\sum_{i=0}^{N-1}\frac{c_i}{b^{i+1}}+\frac{c_N+1}{b^{N+1}}\leq\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a_i}{b^{i+1}}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{c_i}{b^{i+1}}<\sum_{i=0}^{N-1}\frac{c_i}{b^{i+1}}+\frac{c_N}{b^{N+1}}+\frac{1}{b^{N+1}}$. Ce qui est absurde.

2. Vérifier que le développement proposé fait bien l'affaire!!

□

Définition 5.3.6. *On définit un ordre sur $\{0,1,2\ldots,b-1\}^{\mathbb{N}}$. Si $(a_i)_i,(b_i)_i\in\{0,1,2\ldots,b-1\}^{\mathbb{N}}$, on dit que $(a_i)_i$ est plus petit que $(b_i)_i$ suivant l'ordre lexicographique si $(a_i)_i=(b_i)_i$*

ou bien le premier nombre (= le plus à gauche) $a_i - b_i$ *non nul est négatif et on note* $(a_i)_i \leq_{\text{lex}} (b_i)_i$.

Lemme 5.3.7. *Soient* $x, y \in [0,1]$ *avec* $x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^{i+1}}$ *et* $y = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c_i}{b^{i+1}}$.
Alors $(a_i)_i \leq_{\text{lex}} (c_i)_i \Rightarrow x \leq y$, *c'ést-à-dire que que l'application*
$f : \left(\{0, \ldots, b-1\}^{\mathbb{N}}, \leq_{\text{lex}}\right) \longrightarrow \left([0,1], \leq\right) : \overline{a} = (a_i)_{i \geq 0} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^{i+1}}$, *est croissante.*

Preuve Supposons $(a_i)_i \leq_{\text{lex}} (c_i)_i$. Les deux suites sont égales alors $x = y$. Supposons que les deux suites soit distinctes et soit N le premier entier tel que $a_N - c_N$ non nul est négatif. Alors $c_N - a_N \geq 1$.

$$y - x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c_i - a_i}{b^{i+1}} = \sum_{i=N}^{+\infty} \frac{c_i - a_i}{b^{i+1}} = \frac{c_N - a_N}{b^{N+1}} + \sum_{i>N}^{+\infty} \frac{c_i - a_i}{b^{i+1}}$$
$$= \frac{c_N - a_N}{b^{N+1}} + \frac{1}{b^{N+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{c_{N+1+i} - a_{N+1+i}}{b^{i+1}}.$$

Comme $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|c_{N+1+i} - a_{N+1+i}|}{b^{i+1}} \leq 1$ et $c_N - a_N \geq 1$ alors
$$y - x \geq \frac{c_N - a_N}{b^{N+1}} - \frac{1}{b^{N+1}} \geq 0.$$

□

Ensemble de Cantor

L'ensemble de Cantor K_3 a été introduit en 1883 par G. Cantor. Le point de départ de la construction est l'intervalle compact $C_0 = [0,1]$. On obtient alors un fermé C_1 en retirant à C_0 son tiers médian ouvert $]1/3, 2/3[$.

Ainsi $C_1 = [0;1/3] \bigcup [2/3;1]$.

À l'étape suivante on fabrique C_2 en appliquant la même construction à chacun des deux intervalles fermés constituant C_1 et ainsi de suite.

On fabrique de la sorte pour tout $n > 0$ un fermé C_n de $[0,1]$ dont on voit par récurrence qu'il est formé de 2^n intervalles compacts deux à deux disjoints de même longueur $1/3^n$.

L'ensemble de cantor est $K_3 = \bigcap_{n>0} C_n$.

Faire un dessein

Plus explicitement, on voit par récurrence sur n que C_n est la réunion disjointe des compactes $C_{n,q} = [\frac{q}{3^n}, \frac{q+1}{3^n}]$, où $0 \leq q \leq 3^n - 1$ dont l'écriture en base 3 ne comporte aucun chiffre égal à 1 (voir la proposition ci-dessous). Le complémentaire de C_n dans $[0,1]$ est quant à lui formé de $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ intervalles ouverts deux à deux disjoints de longueur comprise entre $1/3$ et $1/3^n$.

De plus, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a 2^{k-1} intervalles ouverts de longueur $1/3^k$ dans le complémentaire de C_n qui est la réunion (disjointe) du complémentaire de C_{n-1} et des 2^{n-1} intervalles ouverts de diamètre $1/3^n$:

$I_{n,q} = \left]\frac{3q+1}{3^n}, \frac{3q+2}{3^n}\right[$, où $0 \leq q \leq 3^n - 1$ dont l'écriture en base 3 ne comporte aucun chiffre égal à 1 (voir la proposition ci-dessous).

On note $a_{q,n} = (3q+1)/3^n$ et $b_{q,n} = (3q+2)/3^n$ les extrémités de l'intervalle ouvert $I_{n,q}$. On peut remarquer que chacune de ces extrémités est dans tous les C_n et appartiennent donc en fait à K_3 qui est donc non vide.

Proposition 5.3.8. *L'ensemble de Cantor K_3 est formé des réels de $[0,1]$ ayant un développement triadique (= en base 3) ne comportant pas de 1.*

Preuve On va montrer que le complémentaire de K_3 est formé des réels dont tous les développements en base 3, comportent au moins un coefficient égal à 1. On note $\mathcal{D}$ cet ensemble. On rappelle que l'application $f : \{0, \ldots, b-1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1] : \overline{a} = (a_i)_{i \geq 0} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^{i+1}}$, est croissante, continue et surjective.

1. $\underline{K_3 \subset \mathcal{D}?}$ Soit $n > 1$ un entier et $0 \leq q \leq 3^{n-1} - 1$ un entier dont l'écriture en base 3 ne comporte aucun coefficient égal à 1.

   Ecrivons alors q en base 3 : $q = a_0 3^{n-2} + a_1 3^{n-3} + \ldots + a_{n-2} 3^0$ avec $a_i \in \{0, 2\}$.

   $a_{q,n} = \frac{(3q+1)}{3^n} = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{3^2} + \ldots + \frac{a_{n-3}}{3^{n-2}} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} = f\big((a_0, a_1 \ldots, a_{n-2}, 1, 0, 0, \ldots)\big)$

   et $b_{q,n} = \frac{(3q+2)}{3^n} = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{3^2} + \ldots + \frac{a_{n-3}}{3^{n-2}} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}$; en transformant $b_{q,n}$ en développement 3-adique infini, on a :

   $b_{q,n} = \frac{(3q+2)}{3^n} = \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{3^2} + \ldots + \frac{a_{n-3}}{3^{n-2}} + \frac{a_{n-2}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}}$

   $= f\big((a_0, a_1 \ldots, a_{n-2}, 1, 2, 2, \ldots)\big)$

   Soit $x \in I_{q,n}$ alors $a_{q,n} < x < b_{q,n}$. Posons $x = \sum_{i \geq 0}^{\infty} \frac{c_i}{3^{i+1}}$ alors forcément :

   $\big(a_0, \ldots, a_{n-2}, 1, 0, 0, \ldots\big) \leq_{\text{lex}} \big(c_0, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n, \ldots\big) \leq_{\text{lex}} \big(a_0, a_1 \ldots, a_{n-2}, 1, 2, 2, \ldots\big)$

Par identification au niveau de la $(n-1)^{\text{eme}}$ composante on a $c_{n-1}=1$.

2. $\underline{\mathcal{D}\subset K_3\,?}$ Soit $x\in\mathcal{D}$, posons $x=\sum_{i\geq 0}^{\infty}\dfrac{a_i}{3^{i+1}}$ un développement triadique de x dont l'un des coefficients est égal à 1. On note n le plus petit entier tel que $a_{n-1}=1$. On a alors $a_0,\dots,a_{n-2}\in\{0,2\}$ et en notant q l'entier dont l'écriture en base 3 est donné par $q=a_0 3^{n-2}+a_1 3^{n-3}+,\dots+a_{n-2}3^0$.

   On pose $a_{q,n}=\frac{(3q+1)}{3^n}$ et $b_{q,n}=\frac{(3q+2)}{3^n}$.

   On a : $a_{q,n}=\frac{(3q+1)}{3^n}=\dfrac{a_0}{3}+\dfrac{a_1}{3^2}+\dots+\dfrac{a_{n-3}}{3^{n-2}}+\dfrac{a_{n-2}}{3^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}$, en transformant en développement 3-adique infini, on a :

   $a_{q,n}=\frac{(3q+1)}{3^n}=\dfrac{a_0}{3}+\dfrac{a_1}{3^2}+\dots+\dfrac{a_{n-3}}{3^{n-2}}+\dfrac{a_{n-2}}{3^{n-1}}+\dfrac{0}{3^n}+\sum_{i=n+1}^{\infty}\dfrac{2}{3^{i+1}}$

   $=f\big((a_0,a_1\dots,a_{n-2},0,2,2,\dots)\big)$

   Le développement triadique fini de $b_{q,n}$ est

   $b_{q,n}=\frac{(3q+2)}{3^n}=\dfrac{a_0}{3}+\dfrac{a_1}{3^2}+\dots+\dfrac{a_{n-3}}{3^{n-2}}+\dfrac{a_{n-2}}{3^{n-1}}+\dfrac{2}{3^n}=f\big((a_0,a_1\dots,a_{n-2},2,0,0,\dots)\big)$

   Par construction :

   $\big(a_0,\dots,a_{n-2},0,2,2,\dots\big)\leq_{\text{lex}}\big(c_0,\dots,c_{n-2},c_{n-1},c_n,\dots\big)\leq_{\text{lex}}\big(a_0,a_1\dots,a_{n-2},2,0,0,\dots\big)$,

   doc en conposant par f on a : $a_{q,n}<x<b_{q,n}$ c'est-à-dire $x\in I_{q,n}$

□

Théorème 5.3.9. ***Homémorphisme*** $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\equiv K_3$

L'application $\varphi:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to K_3:(a_i)_i\mapsto\sum_{i=0}^{+\infty}\dfrac{2a_i}{3^{i+1}}$ *est un homéomorphisme de* $[0,1]^{\mathbb{N}}$*, muni de la topologie produit des topologies discrètes, sur* K_3*.*

Preuve

1. Injectivité Soient $\overline{a}=(a_i)_i,\overline{c}=(c_i)_i\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Supposons $\overline{a}\neq\overline{c}$, montrons que $\varphi(\overline{a})\neq\varphi(\overline{c})$. Soit N, le plus petit entier tel que $a_N\neq c_N$ alors

$$|\varphi(\overline{a})-\varphi(\overline{c})|=|\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2a_i}{3^{i+1}}-\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2c_i}{3^{i+1}}|=|\sum_{i=N}^{+\infty}\frac{2(a_i-c_i)}{3^{i+1}}|\geq$$

$$\frac{2|a_N-c_N|}{3^{N+1}}-\sum_{i>N}^{+\infty}|\frac{2(a_i-c_i)}{3^{i+1}}|\geq\frac{2|a_N-c_N|}{3^{N+1}}-\frac{1}{3^{N+1}}\sum_{i=0}^{+\infty}|\frac{2(a_{N+1+i}-c_{N+1+i})}{3^{i+1}}|$$

Mais $\sum_{i=0}^{+\infty} |\dfrac{2(a_{N+1+i}-c_{N+1+i})}{3^{i+1}}| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{2}{3^{i+1}} = \lim_{j\to+\infty} \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{3^j}}{2/3} = 1$

Ansi $|\varphi(\overline{a})-\varphi(\overline{c})| \geq \dfrac{2|a_N-c_N|}{3^{N+1}} - \dfrac{1}{3^{N+1}} = \dfrac{2}{3^{N+1}} - \dfrac{1}{3^{N+1}} = \dfrac{1}{3^{N+1}} > 0$

2. Continuité : S'inpirer du théorème précédent.

3. Bijection réciproque On a déjà prouvé que les élements de K_3 ont une développement triadique ne contenant pas de 1, donc φ est surjective. Si $x \in K_3$, il existe $\overline{\lambda}_x = \big(\lambda_i(x)\big)_i$ tel que $x = \varphi(\overline{\lambda}_x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{2\lambda_i(x)}{3^{i+1}}$ où $\lambda_i : K_3 \to \{0,1\}$.

   Comme le développement illimité est unique alors $\big(\lambda_i(x)\big)_i$ est unique, par suite $\lambda = (\lambda_i)_i : K_3 \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est bien une application et $\varphi \circ \lambda(x) = x$. Ansi φ est bijection de réciproque λ.

4. Continuité de la bijection réciproque Si la ieme projection est $p_{ri} : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ alors $\lambda_i = p_{ri} \circ \lambda$. Comme les p_{ri} sont continus par définition de la toplogie produit, la caractérisation de la sous-section précédente, permet de montrer que λ est continu si chacun des λ_i l'est.

   Si $|x-y| \leq \dfrac{1}{3^{N+1}}$ alors $\lambda_i(x) = \lambda_i(y)$ pour $i = 0,1,\ldots,N$ alors car en utilisant la preuve par l'absurde utilisée pour la continuité ci-dessus, on voit que si $N"$ est le premier entier tel que $\lambda_i(x) \neq \lambda_i(y)$ alors $|x-y| \geq \dfrac{1}{3^{N"+1}}$. Ansi pour $j \geq 0$, si $|x-y| \leq \dfrac{1}{3^{j+1}}$ alors $\lambda_j(x) = \lambda_j(y)$ donc λ_j est continue. Par suite λ est continue.

$\square$

5.3.5 Application 4 : Topologie limite projective

Définition 5.3.7. ***(proposition)***

Soit I un ensemble muni d'un ordre $\preceq$ filtrant croissant (i.e que pour tous $i,j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $i \preceq k$ et $j \preceq k$).

Pour tout $i \in I$, soit X_i un un espace topologique ; $f_{ij} : X_j \to X_i$ une application continue pour tous i,j, tels que $i \preceq j$; et supposons $f_{ii} = id$ si $i \in I$ et $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ si $i \preceq j \preceq k$. Un système $\big((X_i)_{i\in I}, (f_{ij}\big)$ vérifiant ces hypothèses est appelé système projectif d'espaces to-

pologiques.

On pose $X = \prod_{i\in I} X_i$*, l'espace topoplogie produits des* X_i*. On note le sous esapce* $\varprojlim X_i = \{x = (x_i)_{i\in I} \in X / f_{ij}(x_j) = x_i\}$ *pour* $i \preceq j$.

Pour tout $t \in I$*, soit* $p_t : X = \prod_{i\in I} X_i \to X_t$ *la projection canonique classique et on note* f_t *la restriction de* p_t *à* $\varprojlim X_i$.

La topologie initiale sur $\varprojlim X_i$ *definie par* $(f_i)_{i\in I}$ *est appelée la topologie limite projective.*

Sauf mention contraire, l'ensemble $\varprojlim X_i$ *sera munie de cette topologie.*

Donc, la topologie limite projective est la topologie la plus moins fine rendant continue les applications $f_i : \varprojlim X_i \to X_i$ *; c'est aussi par constrution la topologie induite par* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *sur* $\varprojlim X_i$.

5.4 Superposition de structures algébriques et topologiques

5.4.1 Groupes topologiques

Définition 5.4.1. .

1. *Un groupe* G *(noté multiplicativement) est un* ***groupe topologique*** *s'il est munie d'une topologie rendant continue les opérations de bases*

$$G \times G \longrightarrow G : \ (x, y) \longmapsto x * y$$
$$G \longrightarrow G : \ x \longmapsto x^{-1}$$

2. *Un morphisme de groupes topologiques entre deux groupes topologiques est un morphisme de groupes qui est continu. Un isomorphisme de groupes topologiques est un isomorphisme de groupes qui est un homéomorphisme. Deux groupes topologiques sont* <u>*isomorphes*</u> *s'il existe un isomorphisme de groupes topologiques de l'un sur l'autre.*

Exemple 5.4.1. ***(Exercices)***

1. $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ *munis de la topologie induite est un groupe toplogique.*
2. *Si* $(G_i)_{i\in I}$ *est une famille de groupes topologiques alors l'ensemble produit* $G = \prod_{i\in I} G_i$ *est un groupe toplogique muni de la toplogie produit.*

3. *Soit* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $K = \mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$, *l'anneau des matrices carrées d'ordre* n. *Soit* $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/Det(A) \neq 0\}$

   La multiplication $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow G: \ (A, B) \longmapsto A * B$ *est polynomiale en les coefficients de* A *et* B *donc, elle est continue.*

   De même, l'inverse $GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K}): \ A \longmapsto A^{-1} = \frac{1}{Det(A)}\ {}^t\mathrm{Comat}(A)$

   est une fonction rationnelle (de dénomineteur non nul) en les coefficients de A, *donc elle est continue.*

   Par suite $GL_n(\mathbb{K})$ *est un groupe toplogique.*

5.4.2 Anneaux et Corps topologiques

Définition 5.4.2. .

1. *Un anneau topologique est un ensemble* A *muni d'une structure d'anneau et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que les applications*

$$S_A: \ A \times A \longrightarrow A: \ (x, y) \longmapsto x - y$$
$$P_A: A \times A \longrightarrow A: \ (x, y) \longmapsto x.y$$

   sont continues.

   En particulier, le groupe additif $(A, +)$ *est un groupe topologique.*

2. *Un morphisme d'anneaux topologiques entre deux anneaux topologiques est un morphisme d'anneaux qui est continu. Un isomorphisme d'anneaux topologiques est un isomorphisme d'anneaux qui est un homéomorphisme. Deux anneaux topologiques sont* <u>*isomorphes*</u> *s'il existe un isomorphisme d'anneaux topologiques de l'un sur l'autre.*

Exemple 5.4.2. .

1. *Soit* A *un anneau topologique et* B *un sous anneau de* A, *muni de la topologie induite, alors* B *est un anneau topologique.*

2. *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille d'anneaux topologiques, et* $A = \prod_{i\in I} A_i$*muni des structures d'anneau produit et d'espace topologique produit, est un anneau topologique.*

3. *Par continuité des opérations, l'adhérence d'un sous-anneau d'un anneau topologique est encore un sous-anneau.*

4. *l'anneau $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, est un anneau topologique si on le muni de la topologie discrète,. Muni de la structure de sous-anneau de l'anneau produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, l'espace topologique limite projective $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, est un anneau topologique.*

Définition 5.4.3. .

1. *Un corps (commutatif!) topologique est un ensemble K muni d'une structure de corps et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que les applications*

$$S_K : \ K \times K \longrightarrow K : \ (x, y) \longmapsto x - y$$
$$P_K : K^* \times K \longrightarrow K : \ (x, y) \longmapsto x^{-1}.y$$

sont continues.

En particulier, les strutures $(K, +)$ et $(K^*, \times)$ sont des groupes topologiques. Toute application polynomiale $P : K^n \to K$ est continue.

2. *Un morphisme de corps topologiques entre deux corps topologiques est un morphisme de corps qui est continu. Un isomorphisme de corps topologiques est un isomorphisme de corps qui est un homéomorphisme. Deux corps topologiques sont <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme de corps topologiques de l'un sur l'autre.*

5.4.3 Espaces vectoriels topologiques

Définition 5.4.4. .

1. *Un espace vectoriel est un **espace vectoriel topologique** s'il est muni d'une topologie rendant continue les opérations de base*

$$S_E : \ E \times E \longrightarrow E : \ (x, y) \longmapsto x + y$$
$$P_E : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E : \ (\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$$

En particulier, le groupe additif $(E, +)$ est un groupe topologique. Les translations $t_x : y \to y + x$, où $x \in E$, sont des homéomorphismes. Les homothéties $h_\lambda : y \to \lambda y$, ou $\lambda \in K$, sont des homeomorphismes.

2. *Un morphisme d'espaces vectoriels topologiques entre deux espaces vectoriels topologiques est une application lineaire qui est continue. Un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques est un isomorphisme lineaire qui est un homéomorphisme. Deux*

espaces vectoriels topologiques sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de l'un sur l'autre.

Exemple 5.4.3. .

1. *On a vu au chapitre 2, que si* $(E, ||.||)$ *est un espace vectoriel normé alors les opérations de bases sont continues donc, est un espace vectoriel topologique pour la topologie découlant de cette norme*
2. *On a vu que* X *est un espace vectoriel normé et* Y *est un sous-espace vectoriel fermé* X*, alors* X/Y *est un espace vectoriel toplogique muni de la topologie quotient.*

Chapitre 6

Espaces compacts, Espaces localement compacts

Nous commencons par rappeler l'utilité de la compacité évoqué dans les esapces métriques du chapitre 1 et qui reste valable dans le cas général.

L'utilité de la notion de compacité vient du fait qu'elle permet en général, de ramener des problèmes de complexité apparemment infinie à l'étude d'un nombre fini de cas ($\Leftrightarrow$ de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un recouvrement fini).

Le terme de compacité évoque la notion d'étroitesse. Ainsi dans un espace topologique compact, il n'est pas possible de mettre une infinité de points sans qu'ils s'accumulent quelque part ($\Leftrightarrow$ l'existence des valeurs d'adhérences dans les espaces métriques).

6.1 Espaces compacts

Définition 6.1.1. *Un espace toplogique (X, T) est dit* ***pre-compacte ou vérifie la propriété de Borel-Lesbegue****, si de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini c-a-d si $X = \cup_{i \in I} U_i$ où U_i est un ouvert, alors il existe $U_1, \ldots, U_n$ tel que $X = \cup_{i=1}^{n} U_i$.*

Définition 6.1.2. *Un espace topologique (X, T) est dit* ***compacte****, s'il est* ***séparé*** *et* ***pre-compact****.*

exemple : voir chapitre 1 sur les espaces mťriques.

Proposition 6.1.1. *Un espace topologique (X, T) est compact ssi il est séparé et pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$, de fermés (X, T) dont l'intersection est vide, on peut en extraire un nombre fini de fermés dont l'intersection est vide.*

Preuve Utiliser le complémentaire □

Compacité des espaces métriques

On prouvé les équivalences suivantes dans les espaces métriques.

(X, d) est compact=   "Pour tout recouvrement de (X, d) par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$, on peut extraire un recouvrement fini
$\Updownarrow$
Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de (X, d) admet une valeur d'adhérence l
$\Updownarrow$
X est complet et totalement borné
$\Updownarrow$
Pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$, de fermés (X, d) dont l'intersection est vide,   on peut en extraire un nombre fini de fermés dont l'intersection est vide

□

Définition 6.1.3. .

- *Une partie A d'un espace topologique séparé (X, T) est dit compact si (A, T_A) est compact en tant que sous espace topologique.*
- *Une partie A d'un espace topologique séparé (X, T) est relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.*

exemple : voir les espaces métriques du chapitre 1

Proposition 6.1.2. *Si (X, T) est un espace topologique compact et F est un fermé de X alors F est compact.*

Preuve La preuve découle du fait que si F est fermé, alors, les fermés de F sont aussi des fermés de X. □

Théorème 6.1.3. *Soit (X, T) un espace topologique séparé.*

1. *Si K est une partie compacte de X et $x \in X \setminus K$, alors, il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_x$ tels que $K \subset \mathcal{O}_K$ et $x \in \mathcal{O}_x$.*
2. *Si K_1 et K_2 sont deux compacts disjoints de X, alors, il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que $K_1 \subset \mathcal{O}_1$ et $K_2 \subset \mathcal{O}_2$.*

Proposition 6.1.4. *Dans un espace topologique séparé (X, T), une partie A compacte est fermée.*

Preuve Il suffit de montrer que A^c est un ouvert.

Soit $x \in A^c$, comme A est compact, alors, d'après la proposition précdente, il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_x$ tels que $A \subset \mathcal{O}_A$ et $x \in \mathcal{O}_x$, donc $x \in \mathcal{O}_x \subset A^c$. Ce qui prouve que A^c est ouvert et donc A est fermé. $\square$

Corollaire 6.1.5. *Dans un espace topologique compact, les compacts sont les fermés.*

Nous donnons ici, une notion parfois utile quand on veut utiliser des arguments de compacité pour des ensembles qui ne sont pas fermés.

Définition 6.1.4. *On dit qu'une partie A d'un espace topologique séparé (X, T) est relativement compacte si sont adhérence est compacte.*

Proposition 6.1.6. *Soit (X, T) un espace topologique séparé tout sous-ensemble d'une partie relativement compacte est relativement compacte.*

Preuve Soit A relativement compact et $B \subset A$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$. Comme $\overline{A}$ est compact et $\overline{B}$ est fermé alors $\overline{B}$ est compact.

$\square$

Proposition 6.1.7. *Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacte.*

Preuve Simple. $\square$

Proposition 6.1.8. *Dans un espace topologique, une intersection quelconque de parties compactes est compacte*

Preuve Simple (s'inpirer du cas des espaces métriques). □

On va rappeler **trois résultas qui restent équivalents si on admet l'un comme un axiome,** et qui jouent un rôle important en mathématique fondamental (voir le cours d'algère ou de logique).

Proposition 6.1.9. ***(Axiome du choix).***
Soient X et Y deux ensembles. Etant donné une application F de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(Y)$ des parties de Y telle que, pour tout $x \in X$, on ait $F(x) \neq \emptyset$, il existe une application f de X dans Y telle que, $\forall x \in X$, on ait $f(x) \in F(x)$.

Proposition 6.1.10. ***(Théorme de Zermelo).***
Sur tout ensemble E, il existe un bon ordre.

Proposition 6.1.11. ***(Lemme de Zorn).***
Soient E un ensemble ordonné inductif et α un élément de E. Il existe un élément maximal $\mathcal{M}$ de E tel que $\alpha \leq \mathcal{M}$.

□

Le **Lemme de Zorn** est ce qu'on appelle un théorème d'existence, il nous dit q'une partie maximal existe sans nous donner une méthode (un algorithme) pour le construire. Raison pour laquelle on évite de l'utiliser dans une preuve à chaque fois que de possible.

Le **Lemme de Zorn** a de multiples applications parmi lesquelles, l'existence d'une base pour tout espace vectoriel E sur un corps commutatif K (**théorème de la base incomplete**).

Théorème 6.1.12. ***(Théorème de Tychonoff).*** *Un produit quelconque d'espaces topologiques compacts est compact*

Nota Bene Dans ce théorème, on va utiliser le **Lemme de Zorn** pour démontrer le cas général, mais dans le cas fini, le résultat peut être démontrer sans le lemme de Zorn, de même dans le cas dénombrable pour les espaces métriques, on peut utiliser le procédé diagonal de Cantor déjà rencontré sur la completion métrique pour le montrer .

Preuve

Soient $X_i, i \in I$ des espaces topologiques compacts non vides et $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Séparation : Soient $x = (x_i)_{i\in I} \neq y = (y_i)_{i\in I} \in X$, alors, il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ dans X_{i_0} qui est séparé par hypothèse. Donc il esxiste deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_{x,i_0}, \mathcal{O}_{y,i_0}$ contenant x_{i_0}, y_{i_0} respectivement. Par suite $\mathcal{O}_x = O_{x,i_0} \times \prod_{i\neq i_0} X_i$ et $\mathcal{O}_y = O_{y,i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i$ sont deux ouverts disjoints de X, contenant x, y respectivement.

Propriété de Borel-Lebesggue :

Soit $\mathcal{F}$ une famille de fermés de X vérifiant le propriété P suivante : "toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est non vide". On va montrer que $\bigcap_{H\in\mathcal{F}} H \neq \emptyset$.

Soit $\mathcal{A} = \big\{\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)/\mathcal{F} \subset \mathcal{B},\ \text{et } \mathcal{B} \text{ vérifiant le propriété } P\big\}$. $\mathcal{A}$ est non vide car $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$. Ordonnons $\mathcal{A}$ par l'inclusion. Soit $(\mathcal{B}_n)$ une suite croissante déléments de $\mathcal{A}$. Posons $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Une intersecttion finie d'éléments de $\mathcal{B}$ est aussi une intersection finie de l'un des $\mathcal{B}_n$ car la suite des $\mathcal{B}_n$ est croissante, par suite cette intersection est non vide. Donc, il est clair que $\mathcal{A}$ est inductif, et donc le Lemme de Zorn implique qu'il existe un élément maximal $\widehat{\mathcal{F}}$ contenant $\mathcal{F}$.

Notons que la maximalité de $\widehat{\mathcal{F}}$ implique que toute intersection finie d'éléments de $\widehat{\mathcal{F}}$ appartient à $\widehat{\mathcal{F}}$ et que toute partie de X qui rencontre tout élément de $\widehat{\mathcal{F}}$ appartient à $\widehat{\mathcal{F}}$.

Pour tout $i \in I$, soit p_i la projection de X sur X_i. Si $G_{j\in J}$ une famille finie d'éléments de $\widehat{\mathcal{F}}$, alors $p_i\big(\bigcap_{j\in J} G_j\big) \subset \bigcap_{j\in J} p_i(G_j)$ comme $\bigcap_{j\in J} G_j \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{j\in J} p_i(G_j) \neq \emptyset$, par suite toute intersection finie d'ensemble de la forme $p_i(G),\ G \in \widehat{\mathcal{F}}$ est non vide. On passe à l'adhérence, et on a alors en particulier "toute intersection finie d'ensemble de la forme $\overline{p_i(G)},\ G \in \widehat{\mathcal{F}}$ est non vide". Comme X_i est compact ceci implique "l'intersection de tous les fermés de la forme $\overline{p_i(G)},\ G \in \widehat{\mathcal{F}}$ est non vide, ainsi, il existe $x_i \in X_i$ appartenant à tous les $\overline{p_i(G)}, G \in \widehat{\mathcal{F}}$.

Soit V un voisinage de $x = (x_i)_{i\in I}$ dans X, de la forme $V = \prod_{i\in I} V_i$ avec V_i est un voisinage de X_i et $V_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices i que l'on note $i_1, \ldots, i_n$, alors par définition de la topologie produit, $V = \bigcap_{j=1}^n p_{i_j}^{-1}(V_{i_j})$. Comme $x_i \in \overline{p_i(G)}, \forall G \in \widehat{\mathcal{F}}$ alors $p_i^{-1}(V_i) \bigcap G \neq \emptyset,\ \forall G \in \widehat{\mathcal{F}}$. Alors, d'après ce qui précéde $p_i^{-1}(V_i) \in \widehat{\mathcal{F}}$ et donc $V = \bigcap_{j=1}^n p_{i_j}^{-1}(V_{i_j}) \in \overline{\mathcal{F}}$. Par suite, par définition de $\widehat{\mathcal{F}}$, on a $V \bigcap G \neq \emptyset, \forall G \in \widehat{\mathcal{F}}$. Par conséquant, $V \bigcap F \neq \emptyset, \forall F \in \mathcal{F}$, et comme V est un voisinage arbitraire de x alors $x \in \overline{F} = F,\ \forall F \in \mathcal{F}$.

On conclut que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$, comme désiré. CQFD. $\square$

Théorème 6.1.13. *Soient (X,T) et (X',T') deux espaces topologiques séparés. L'image d'un compact par une application continue de X dans X' est compacte*

Preuve (voir le chapitre 3) $\square$

Proposition 6.1.14. *Toute fonction continue sur un espace compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Preuve Soit (X,T) un espace compact (séparé) et $f : X \to \mathbb{R}$, continue, alors $f(X)$ est compact. Donc $f(X)$ est fermé et borné, par suite contient ses bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$.

$\square$

L'image réciproque d'un compact n'est pas forcément un compact même sur les espaces métriques.

Cette remarque motive la définition suivante

Définition 6.1.5. *On dit qu'une application continue $f : X \to X'$, où (X,T) et (X',T') deux espaces topologiques séparés, est propre si pour tout compact K' de X' l'image réciproque $f^{-1}(K')$ est un compact de X.*

Théorème 6.1.15. *(Topolgie quotient et compacité) Soient (X,T) un espace topologique compact et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur l'ensemble X. Alors l'espace topologique $X/\mathcal{R}$ est séparé si et seulement si la relation R est fermée. De plus, si ces conditions sont satisfaites, $X/\mathcal{R}$ est compact.*

Preuve

1. Séparation

   $\Rightarrow$) Supposons $X/\mathcal{R}$ séparé et montrons que $\mathcal{R}$ est fermé c'est-à-dire $\pi : X \to X/\mathcal{R} : x \mapsto \overline{x}$ est fermé. Soit F, un fermé, posons $G = \pi(F)$ et montrons que G est fermé en montrant que G^c est ouvert. Soit $\overline{x} \in G = \pi(F)$. Pour tout $\overline{y} \in G = \pi(F)$, il existe deux ouverts disjoints $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{x},\overline{y}}$ et $\widehat{\omega}_{\overline{x},\overline{y}}$ de $X/\mathcal{R}$ contenant $\overline{x}$ et $\overline{y}$ respectivement. Comme π est continue alors $\bigcup_{\overline{y}\in G=\pi(F)} \pi^{-1}\big(\widehat{\omega}_{\overline{x},\overline{y}}\big)$ est un recouvrement d'ouvert de F, comme F est compact (car fermé dans un compact),on peut extraire un recouvrement fini : $F \subset \bigcup_{i=1}^{n_{\overline{x}}}{}_{\overline{y}_i \in G=\pi(F)} \pi^{-1}\big(\widehat{\omega}_{\overline{x},\overline{y}_i}\big)$. Alors on a un recouvrement fini : $G = \pi(F) \subset \bigcup_{i=1}^{n_{\overline{x}}}{}_{\overline{y}_i \in G=\pi(F)} \widehat{\omega}_{\overline{x},\overline{y}_i}$ et de plus $\bigcap_{i=1}^{n_{\overline{x}}}{}_{\overline{y}_i \in G=\pi(F)} \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{x},\overline{y}_i}$ est un ouvert contenant $\overline{x}$ et contenu dans G^c comme désiré.

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}$ est fermé c'est-à-dire $\pi : X \to X/\mathcal{R} : x \mapsto \overline{x}$ est fermé et montrons que $X/\mathcal{R}$ séparé.

Soient $\overline{x} \neq \overline{y}$ deux points distincts de $X/\mathcal{R}$. Alors $\pi^{-1}(\{\overline{x}\})$ et $\pi^{-1}(\{\overline{y}\})$ sont des fermés du compact X, donc sont des compacts. Comme $\overline{x} \neq \overline{y}$ alors $\pi^{-1}(\{\overline{x}\})$ et $\pi^{-1}(\{\overline{y}\})$ sont disjoints, par suite, comme vu précédemment,il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_{\overline{x}}$ et $\mathcal{O}_{\overline{y}}$ contenant $\pi^{-1}(\{\overline{x}\})$ et $\pi^{-1}(\{\overline{y}\})$ respectivement.

On va construire des ouverts saturés disjoints $\mathcal{O}_{\overline{x},s}$ et $\mathcal{O}_{\overline{y},s}$ contenant $\pi^{-1}(\{\overline{x}\})$ et $\pi^{-1}(\{\overline{y}\})$ respectivement.

Comme π est fermé, posons $F_x = X \setminus \mathcal{O}_{\overline{x}}$ alors $G_x = \pi(F_x)$ est un fermé de $X/\mathcal{R}$, contenant $\overline{y}$ et ne contenant pas $\overline{x}$. Ponsons $\mathcal{O}_{\overline{x},s} = X \setminus \pi^{-1}(G_x) = X \setminus \pi^{-1}\big(\pi(F_x)\big)$, alors c'est un ouvert saturé de X, tel que $\pi^{-1}\big(\pi\big(\mathcal{O}_{\overline{x},s}\big)\big) = \mathcal{O}_{\overline{x},s} \subset \mathcal{O}_{\overline{x}}$, et de plus il contient $\pi^{-1}(\{\overline{x}\})$ et ne contient pas $\pi^{-1}(\{\overline{y}\})$.

De façon similaire, il existe un ouvert saturé $\mathcal{O}_{\overline{y},s} = X \setminus \pi^{-1}(G_y) = X \setminus \pi^{-1}\big(\pi(F_y)\big)$, tel que $\pi^{-1}\big(\pi\big(\mathcal{O}_{\overline{y},s}\big)\big) = \mathcal{O}_{\overline{y},s} \subset \mathcal{O}_{\overline{y}}$, et de plus il contient $\pi^{-1}(\{\overline{y}\})$ et ne contient pas $\pi^{-1}(\{\overline{x}\})$.

Comme $\mathcal{O}_{\overline{x}}$ et $\mathcal{O}_{\overline{y}}$ sont disjoints, alors $\mathcal{O}_{\overline{x},s}$ et $\mathcal{O}_{\overline{y},s}$ sont deux ouverts disjoints de $X/\mathcal{R}$ contenant $\overline{x}$ et $\overline{y}$ respectivement. Par suite $X/\mathcal{R}$ est séparé.

2. Découle du fait l'image d'un compact par une application continue est un compact : $\pi(X) = X/\mathcal{R}$

$\square$

Exemple 6.1.1. *Dans le chapitre 2, on avait montrer que si* $(X, ||.||)$ *un espace vectoriel normé et* $Y \subseteq X$ *un sous-espace vectoriel, alors* X/Y *est séparé si et seulement si* Y *est fermé.*

On a déjà prouvé que si un espace métrique (X, d) est compact, alors, il est totalement borné et donc admet une base dénombrable d'ouverts.

On va montrer que cette propriíé caractŕise en faites les espaces métriques en prouvant la réciproque.

Théorème 6.1.16. *Tout espace topologique (X, T) compact admettant une base dénombrable d'ouverts est métrisable.*

□

6.2 Espaces localement compacts

Définition 6.2.1. *On dit qu'un espace topologique (X, T) est localement compact si tout point de X admet une base de voisinages compacts.*

Nota Bene : Dans le cas des espaces métriques, cette définition signifie que, pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$, tel que, pour $t \leq r$, la boule fermé $B_f(x, t)$ est compacte.

Exemple $\mathbb{R}$ est localement compact.

Proposition 6.2.1. *Soit (X, T) un espace topologique dont tout point admet un voisinage compact. Soit K un compact de X et U un ouvert de X contenant K. Alors, il existe un ouvert V tel que $\overline{V}$ soit compact et $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. En particulier, X est localement compact.*

Preuve

Si $U = X$, il suffit de recouvrir K par un nombre fini de voisinages compacts de points de K ce qui est possible puisque K est compact. Ceci implique, dans tous les cas, que K est contenu dans un ouvert G relativement compact.

Supposons $U \neq X$ et soit $A = X \backslash U$. D'après la proposition 6.1.3, pour tout $x \in A$, il existe un ouvert W_x contenant K tel que $x \notin \overline{W}_x$. Alors les ensembles $A \bigcap \overline{G} \bigcap \overline{W}_x$, $x \in A$, forment un famille de fermés dans un espace compact dont l'intersection est vide. Elle posséde donc une sous-famille finie $A \bigcap \overline{G} \bigcap \overline{W}_x$, $1 \leq i \leq n$, d'intersection vide. Il suffit donc de prendre $V = G \bigcap_{1 \leq i \leq n} W_{x_i}$.

□

Proposition 6.2.2. *Soit (X,T) un espace métrique localement compact, alors, tout sous-espace ouvert et tout sous-espace fermé est localement compact.*

Preuve : A faire

$\square$

Comme pour la notion de complétude, on peut agrandir un espace topologique (X,T) en un espace toplogique $(\widehat{X},\widehat{T})$ tel que X est dense dans $\widehat{X}$ et $\widehat{X}$ est compact. Il y'a plusieurs façon de s'y prendre, mais, ici on va présenter la <u>compactification d'Alexandrov</u> $\widehat{X}$ pour un <u>espace localement compact</u> X.

Théorème 6.2.3. ***(Compactification d'Alexandrov)*** *Soit (X,T) un espace topologique localement compact et non compact. Il existe un espace topologique compact $(\widehat{X},\widehat{T})$ tel que X soit un sous-espace dense de $\widehat{X}$ tel que $\widehat{X}\setminus X$ soit réduit à point. (Ce point est dit point à l'infini).*
De plus, si $\widetilde{X}$ est un espace topologique compact tel que :

1. *il existe $\varphi : X \to \widetilde{X}$ qui est un homéomorphisme de X sur $\varphi(X)$,*
2. *$\widetilde{X}\setminus\varphi(X)$ est réduit à un point,*
3. *$\varphi(X)$ est dense dans $\widetilde{X}$,*

alors $\widetilde{X}$ et $\widehat{X}$ sont homéomorphes.

Preuve : <u>Construction du compactifié</u> :

On ajoute un point à X, appelé point à l'infini et note ∞ et on pose :
$\widehat{X} = X\bigcup\{\infty\}$ et $\widehat{T} = T\bigcup\big\{\mathcal{O}\cup(\widehat{X}\setminus K)/\mathcal{O}$ est un ouvert de X et K est un compact de X $\big\}$.

$\widehat{T}$ est bien une topologie car
- si $K_i,\ i=1,\dots,n$ est un nombre fini de compacts alors $\bigcap_{i=1}^n(\widehat{X}\setminus K_i) = \widehat{X}\setminus\bigcup_{i=1}^n K_i)$
- et si $K_i,\ i\in I,\dots,n$ est une famille quelconque de compacts alors $\bigcup_{i\in I}(\widehat{X}\setminus K_i) = \widehat{X}\setminus\bigcap_{i\in I}K_i)$,

et sa restriction à X est T.

<u>Densité</u> : X est dense dans $\widehat{X}$ car un voisinage de ∞ contient, par définition, le complémentaire d'un compact de X et que ce dernier ne peut être vide puisque X n'est pas compact par hypothèse.

Unicité à homéomorphisme près : Soit $i : X \to \widetilde{X}$ l'injection canonique, comme $\varphi : X \to \widetilde{X}$ qui est un homéomorphisme de X sur $\varphi(X)$, alors $h = \varphi \circ i^{-1} : i(X) = X \to \varphi(X)$ est un homéomorphisme. Si $\widetilde{\infty} = \widetilde{X} \setminus \varphi(X)$, on pose $\overline{h}(\infty) = \widetilde{\infty}$, et $\overline{h}(x) = h(x),\ \forall x \in X$. Pour $\overline{h}$ est un homéomorphisme de $\widehat{X}$ sur $\widetilde{X}$, il suffit de montrer qu'elle est continue en ∞. Soit $\widetilde{V}$ est un voisinage ouvert de $\widetilde{\infty}$, $\widetilde{X} \setminus \widetilde{V}$ est un compact contenu dans $\varphi(X)$, donc $(\overline{h})^{-1}(\widetilde{X} \setminus \widetilde{V}) = h^{-1}(\widetilde{X} \setminus \widetilde{V})$ est compact dans $i(X) = X$, ce qui montre que $(\overline{h})^{-1}(\widetilde{V}) = \widehat{X} \setminus h^{-1}(\widetilde{X} \setminus \widetilde{V})$ est un voisinage de ∞ dans $\widehat{X}$.

$\square$

Chapitre 7

Connexite et Connexite par arcs

D'un point de vue éthymologique, "être connexe" c'est "être constitué" en "un seul morceau". Nous allons en fait nous intéresser à cette notion et la traduire en termes topologiques.

On utilise cette notion de connexité pour passer du local au global. La connexité est aussi utilisée pour prouver qu'un segment n'est pas homéomorphe à un cercle, qu'un cercle n'est pas homéomorphe à une sphère etc.

7.1 Connexité dans les espaces topologiques

Proposition 7.1.1. *Soit (X, T) un espace topologique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.*
2. *Il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides de X.*
3. *Il n'existe pas de partition de X en deux fermes non vides de X.*
4. *Les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$.*

Définition 7.1.1. *Soit (X, T) un espace topologique. On dit que X est* ***connexe*** *si X vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition précédente.*

NB : D'un point de vue intuitif, un espace métrique connexe est un espace métrique fait d'un seul morceau (sans trou!!).

Définition 7.1.2. *Soit (X,T) un espace topologique. Une partie $A \subset X$ est* ***connexe*** *si (A,T_A) est connexe.*

Proposition 7.1.2. *Une partie A de (X,T) est connexe si et seulement si l'existence de deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de (X,T) tels que $A \subset \mathcal{O}_1 \bigcup \mathcal{O}_2$ entraîne $A \subset \mathcal{O}_1$ ou $A \subset \mathcal{O}_2$.*

Preuve : A faire. □

Exemple 7.1.1. .

1. *$\mathbb{R}$ est connexe s'il est muni de la distance usuelle d_u mais ne l'est pas s'il est muni de la distance discrète d_t.*
2. *$G =]-2,3] \cup \{6\}$ n'est pas connexe muni de la distance induite par la distance usuelle d_u de $\mathbb{R}$.*
3. *$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Q} \bigcap]-\infty, \sqrt{7}[\right) \bigcup \left(\mathbb{Q} \bigcap]\sqrt{7}, +\infty[\right)$ n'est pas connexe muni de la distance usuelle d_u.*

Théorème 7.1.3. *(**Composante onnexité de** $\mathbb{R}$)*

Une partie A de $(\mathbb{R}, d_u)$, est connexe si et seulement si A est un intervalle.

Théorème 7.1.4. *(**Connexité et Continuité**)*

L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Corollaire 7.1.5. *(**Théorème des valeurs intermédiaires**) Si $f \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ avec (X,T) espace topologique connexe, alors $f(X)$ est un intervalle.*

Proposition 7.1.6. *(**Réunion**) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique (X,T). On suppose qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $A_{i_0} \bigcap A_j \neq \emptyset, \forall j \in I$, alors la réunion $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Preuve Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes telle que pour tout $i,j \in I$, $A_i \bigcap A_j \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que $A = \bigcup_{i\in I} A_i \subset \mathcal{O}_1 \bigcup \mathcal{O}_2$. Pour un $i_0 \in I$ fixé, A_{i_0} est connexe et inclus dans $A \subset \mathcal{O}_1 \bigcup \mathcal{O}_2$. Cela entraîne $A_{i_0} \subset \mathcal{O}_1$ ou $A_{i_0} \subset \mathcal{O}_2$. Si $A_{i_0} \subset \mathcal{O}_1$, comme $A_i \bigcap A_{i_0} \neq \emptyset$ et A_i est connexe, alors, $A_i \subset \mathcal{O}_1$. Par suite $A = \bigcup_{i\in I} A_i \subset \mathcal{O}_1$. Idem, si Si $A_{i_0} \subset \mathcal{O}_2$, alors $A = \bigcup_{i\in I} A_i \subset \mathcal{O}_2$. □

Pour la connexité d'une réunion, on recontre fréquemment la version suivante.

Proposition 7.1.7. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ où $I = \{0, 1, \ldots, p\}$ est fini ou $I = \mathbb{N}$,une famille de parties connexes d'un espace topologique (X, T). On suppose que $A_i \bigcap A_{i+1} \neq \emptyset, \forall i \in I$, alors la réunion $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Preuve : A faire □

Exemple 7.1.2. ***(Le peigne des topologues)*** *Dans $\mathbb{R}^2$, on pose*

$$A_n = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1\} \cup \big\{(\frac{1}{n}, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq 1\big\}, \quad n \in \mathbb{N}, n \leq 1$$

$$A_\infty = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1\} \cup \big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq 1\big\}$$

.

schemas

Chaque A_n est la réunion de l'image de deux intervalles dans $\mathbb{R}^2$, dont l'intersection est non vide, c'est donc un connexe. D'autre part, $\bigcap_{n\geq 1} A_n \neq \emptyset$. Donc l'espace $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ est connexe. On l'appelle le ***peigne des topologues***

Composantes connexes

Une application du résultat précédent est que pour tout point x d'un espace topologique (X, T), l'union de toutes les parties connexes de X contenant x est connexe. C'est le plus grand connexe contenant x. On définit ce connexe dans ce qui suit.

Définition 7.1.3. *Soit (X, T) un espace topologique quelconque. Pour tout point x de X, on appelle composante connexe de x et on note $\mathcal{C}(x)$ le plus grand connexe contenant x : $\mathcal{C}(x) = \bigcup_{x\in C,\ connexe} C$.*

Avec cette notation, il est clair que deux points x et y appartiennent à un même connexe si et seulement si $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$.

Proposition 7.1.8. *La relation "appartenir à un même connexe" qui se traduit par $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$ est un relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de X. Ainsi, les composantes connexes de X forment une partition de X.*

Preuve A faire. $\square$

Nota Bene X est connexe si et seulement si X n'a qu'une seule composante connexe.

Exemple :

- Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, alors U est reunion d'intervalles ouvert deux à deux disjoints qui sont des composantes connexes ouvertes.

- Si $V =]2,5] \bigcup [6,7] \bigcup]10,14[$ a 4 composantes connexes qui sont $]2,5]$, $[6,7]$ et $]10,14[$.

$\square$

Proposition 7.1.9. *Soit x un élément de l'ensemble de Cantor K_3. Sa composante connexe dans K_3 sera réduite au singleton $\{x\}$ (donc l'intérieur de K_3 est vide).*

Preuve On rappelle qu'on a vu au chapitre 2 que : l'application $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to K_3 : (a_i)_i \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{2a_i}{3^{i+1}}$ est un homéomorphisme de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit des topologies discrètes, sur K_3.

Soient $a, b \in K_3$, on suppose que $a < b$, on pose $a = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{2a_i}{3^{i+1}}$ et $b = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{2b_i}{3^{i+1}}$. Soit N le premier entier tel que $a_N \neq b_N$ alors $a_N < b_N$, donc $a_N = 0, b_N = 1$. On pose $c = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{c_i}{3^{i+1}}$ où $c_j = 2a_j = 2b_j$ pour $j < N$ et $c_i = 1$ pour $i \geq N$, alors $a \neq c \neq b$ et $\big((2a_i)_i\big) \leq_{\text{lex}} \big((c_i)_i\big) \leq_{\text{lex}} \big((2b_i)_i\big)$, d'où $a < c < b$. Par suite aucun intervalle contanant a et b ne peut contenir c. Ainsi K_3 ne peut contenir un intervalle contenant a et b. $\square$

Théorème 7.1.10. ***(Adhérence)*** *Si une partie A d'un espace topologique (X,T) est connexe alors son adhérence $\overline{A}$ est connexe.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\overline{A}, \{0,1\})$. Comme A est connexe et f est continue sur A on a $A \subset f^{-1}(\{0\})$ ou $A \subset f^{-1}(\{1\})$. Comme $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{0\})$ sont fermés, alors $\overline{A} = f^{-1}(\{0\})$ ou $f^{-1}(\{0\})$ et par suite f est constante.

Corollaire 7.1.11. *Les composantes connexes d'un espace topologique quelconque (X,T) sont des fermés.*

Théorème 7.1.12. ***(Produit)*** *Un produit d'espaces connexes est connexe.*

Preuve : Soit $(X_i, T_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques connexes. On va montrer que le produit $\prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit est connexe en deux étapes. On traite dans un premier temps le cas où I est fini. Le cas général s'en déduit ensuite par un argument de densité.

1. Cas où I est fini : Il suffit de le faire pour $I = \{1, 2\}$. Soit f une application continue de $X_1 \times X_2$ dans $\{0, 1\}$. Pour tout $x_2 \in X_2$ l'application partielle $f(., x_2) : X_1 \to \{0, 1\}$ est continue donc constante puisque X_1 est connexe. Il en est de même pour l'application partielle $f(x_1; .) : X_2 \to \{0, 1\}$ et ce pour tout $x_1 \in X_1$. Il s'ensuit que f est constante sur $X_1 \times X_2$. Ainsi $X_1 \times X_2$ est connexe.

2. Cas où I est infini : Il suffit de montrer qu'il n'y a qu'une seule composante connexe. Soit $x \in X = \prod_{i\in I} X_i$ fixé. Pour une partie J finie de I, l'ensemble $X_J(x) = \{y \in X, \forall i \in I \setminus J,\ y_i = x_i\}$ est homéomorphe au produit fini $\prod_{i\in J} X_i$ et est donc connexe. Par conséquent le sous-ensemble $X_{(\widehat{x})} = \bigcup_{J\subset I, J \text{ fini}} X_J(x)$ est une union d'ensembles connexes contenant x. C'est un connexe contenant x et on a $X_{(\widehat{x})} \subset \mathcal{C}(x)$ et même $\overline{X_{(\widehat{x})}} \subset \mathcal{C}(x)$. Or l'ensemble $X_{(\widehat{x})}$ est dense dans $X = \prod_{i\in I} X_i$. En effet, soit $y \in X$ et soit $V_y \in \mathcal{V}(y)$. Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert $\mathcal{O}_y = \prod_{h\in H} \omega_h \times \prod_{i\in I\setminus H} X_i$ avec H fini, tel que $y \in \mathcal{O}_y \subset V_y$. On considère le point z de X donné par $z_i = y_i$ si $i \in H$ et $z_i = x_i$ si $i \in I \in H$. Alors, on a clairement $z \in \mathcal{O}_y \bigcap X_{(\widehat{x})} \subset V_y \bigcap X_{(\widehat{x})}$. L'ensemble $\bigcap X_{(\widehat{x})}$ rencontre n'importe quel voisinage de n'importe quel point de X, il est dense dans X. En conclusion, $\mathcal{C}(x) = X$ et $X = \prod_{i\in I} X_i$ est connexe.

□

Corollaire 7.1.13. *Les pavés de $\mathbb{R}^n$ sont connexes.*

7.2 Connexite par arcs

Dans cette sous-section, nous introduisons une notion un peu plus forte que la connexité qui est en fait plus facile à vérifier dans des situations pratiques.

Définition 7.2.1. *Si (X, T) est un espace topologique, on appelle chemin ou arc joignant $x \in X$ à $y \in X$ toute application continue de $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Définition 7.2.2. *On dit qu'une partie A d'un espace topologique (X, T) est connexe par arcs si deux points quelconques de A peuvent être reliés par un chemin.*

La connexité par arcs est surtout une notion pratique pour montrer qún espace est connexe. En termes intuitifs, un espace est connexe par arcs si et seulement si on peut toujours relier deux de ses points par une courbe continue "ce qui en fait une notion moins abstraite que la connexité".

Remarque importante : Soit E un espace vectoriel topologique. A tout segment fermé $[a, b] = \{(1-t)a + tb; t \in [0, 1]\}$ de E ; on peut associer un chemin allant de a vers b : Il suffit de considérer $\gamma : [0, 1] \to E : t \mapsto (1-t)a + tb$.

Lemme 7.2.1. ***(Lemme de connexité par arcs d'une boule dans evn)*** *Toute boule d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.*

Lemme 7.2.2. ***(Lemme de connexité par arcs des sphères dans evn)*** *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n > 2$. Montrer qu'une sphère est connexe par arcs.*

Preuve Comme une sphère quelconque est homéomorphe à la sphère unité, il suffit de montrer que la sphère unité $\mathcal{S}^1 = \{x \in E / ||x|| = 1\}$ est connexe par arcs.

Soient $a, b \in \mathcal{S}^1$. Si $a \neq -b$. On peut alors affirmer que pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)a+tb \neq 0$. L'application $\gamma : t \mapsto \dfrac{1}{||(1-t)a + tb||}\big[(1-t)a + tb\big]$ est alors un chemin joignant a à b inscrit dans $\mathcal{S}^1$.

Si $a = -b$, on transite par un point c non situé sur la droite passant par a et b, ce qui est possible car $n > 2$. $\square$

Lemme 7.2.3. *Soient deux espaces topologiques E et F, et $f : E \to F$ une surjection continue. Si E est connexe par arcs, alors F l'est aussi.*

Preuve Soient p et q des points de F. Il existe un chemin reliant un antécédant de p et un antécédant de q (dans E). L'image de ce chemin est un chemin reliant p et q (dans F) puisque composé d'applications continues. $\square$

Lemme 7.2.4. *Soient deux espaces topologiques E et F, et $f : E \to F$ un homéomorphisme. E est connexe par arcs si et seulement si F l'est*

Théorème 7.2.5. *Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Preuve : Soit (X,T) un espace topologique connexe par arcs et soit $x \in X$ fixé. Si $y \in X$ alors on peut relier x et y par un chemin continu $\gamma_x : [0,1] \to X : / \gamma_x(0) = x,\ \gamma_x(1) = y$ On peut écrire $X = \bigcup_{y \in X}\{y\} = \bigcup_{y \in X} \gamma_x(1) = \bigcup_{y \in X} \gamma_x([0,1])$. Comme l'image $\gamma_x([0,1])$ de l'intervalle $[0,1]$ est connexe puisque γ_x est continu, alors X est connexe car on a une réunion de connexes qui se rencontrent en x

□

La réciproque de ce théorème est fausse.

On va voir un cas particulier ou la reciproque marche avant de donner un contre exemple. Avant on notera ce qui suit.

Théorème 7.2.6. *Une partie ouverte U d'un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.*

Preuve

1. On sait que : Connexité par arcs $\Rightarrow$ connexité
2. Réciproquement, soit U une partie connexe non vide et ouverte de E. Comme un espace vectoriel normé est un espace vectoriel toplogique alors à tout segment fermé $[a,b] = \{(1-t)a + tb; t \in [0,1]\}$ de E ; on peut associer un chemin allant de a vers b en prenant l'application continue $\gamma : [0,1] \to E : t \mapsto (1-t)a + tb$.

   Fixons $a \in A$ et considérons l'ensemble
   $V \overset{def}{=} \{b \in U/\ \text{ il existe un chemin de } U \text{ joignant } a \text{ et } b\}$.

   Par définition même, l'ensemble V est connexe par arcs. Reste à montrer que $V = U$.

   (a) <u>V n'est pas vide</u> car contient le point a.

   (b) <u>L'ensemble V est ouvert</u>. En effet, si $b \in V$, il existe un chemin de U allant de a vers b et, puisque U est ouvert, une boule non vide $B_o(b,r)$ incluse dans U. Pour tout point c de $B_o(b,r)$, le segment $[b,c]$ est inclus dans $B_o(b,r)$ donc dans U. Il existe donc un chemin de U allant de b vers c : Enfin, la réunion d'un chemin allant de a à b avec un chemin allant de b vers c est un chemin allant de a vers c : On conclut donc que $c \in V$, puis que $B_o(b,r) \subset V$.

(c) L'ensemble V est fermé. Soit $b \in \overline{V} \bigcap U$. Choisissons $r > 0$ tel que $B_o(b, r) \subset U$. Comme $b \in V$, l'ensemble $B_o(b, r) \bigcap V$ n'est pas vide et contient donc un point c. Par définition de l'ensemble V, il existe un chemin de U joignant a à c. Par ailleurs, le segment $[b, c]$ appartient à $B_o(b, r)$, donc est inclus dans U, et l'on en déduit finalement que $b \in V$. Par suite V est fermé

Comme V est non vide, ouvert et fermé du connexe U alors forcément $V = U$ et par suite U est connexe par arcs car V, l'est.

□

Exercice 7.2.1. *Soient $A = \{(x, sin(1/x)) \subset \mathbb{R}^2 / 0 < x \leq 1\}$ et $F = \overline{A} \subset \mathbb{R}^2$*

1. *Montrer que $F = A \bigcup \{(0, y)/ -1 \leq y \leq 1\}$*
2. *Montrer que F est connexe.*
3. *Montrer que F n'est pas connexe par arcs.*

Solution

1. *Montrons que $F = A \bigcup \{(0, y)/ -1 \leq y \leq 1\}$.*

   $F \subset A \bigcup \{(0, y)/ -1 \leq y \leq 1\}$? Soit $(x, y) \in F = \overline{A}$. Alors, il existe une suite $((x_n, y_n))_n$ de A qui converge vers (x, y). Si $x > 0$ alors $y_n = sin(1/x_n)$ converge vers $sin(1/x)$ (par continuité de sin*, d'où $(x, y) \in A$. Dans le cas $x = 0$, on a $y_n = \sin(1/x_n)$, d'où $y_n \in [-1, 1]$. Par conséquent, à la limite on a $y \in [-1, 1]$. D'où $(x, y) \in \{0\} \times [-1, 1]$.*
   $A \bigcup \{(0, y)/ -1 \leq y \leq 1\} \subset F = \overline{A}$? Soit $(x, y) \in A \bigcup \{(0, y)/ -1 \leq y \leq 1\}$. Montrons qu'il existe une suite $((x_n, y_n))_n$ de A qui converge vers (x, y). Si $x > 0$, une telle suite existe trivialement (il suffit de prendre la suite constante égale à (x, y). On suppose donc $x = 0$. Ainsi $y \in [-1, 1]$ est quelconque. Soit $z \geq 1$ tel que $\sin(z) = y$. Soit alors $x_n = 1/(z + 2\pi n)$. On aura $\sin(1/x_n) = \sin(z) = y$. Par conséquent la suite $(x_n, \sin(1/x_n))_n$ est une suite de A qui tend vers $(0, y)$ d'où l'inclusion recherchée.

2. *Montrons que F est connexe.*

   Solution *L'ensemble A est connexe dans R^2 comme image du connexe $]0, 1]$ par l'application continue $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x) = (x, sin(1/x))$. $F = \overline{A}$ est connexe.*

3. *Montrons que F n'est pas connexe par arcs.*

Solution *Par l'absurde, supposons F connexe par arcs. Alors, il existe $c : [0,1] \to F$ continue tel que $c(0) = (1, sin(1))$ et $c(1) = (0,0)$. Notons $c(t) = (x(t), y(t))$. Notons $T_0 = \{t \in [0,1]/x(t) > 0\}$. Cet ensemble est non vide puisque $0 \in T_0$. On considère alors $t_0 = \sup(T_0)$. Comme $x(1) = 0$ alors $t_0 < 1$.*

Par l'absurde, supposons $x(t_0) > 0$. Comme $t_0 < 1$, alors par continuité de la 1ere projection x de c, on aurait $x > 0$ sur un ouvert $]a,b[\subset [0,1]$ contenant t_0, donc $l = \frac{b+t_0}{2} > t_0$ et $l \in T_0$ ce qui en contredit la définition de la borne supérieure.

Par conséquent $x(t_0) = 0$. Ainsi par continuité de x en t_0, on a : $\lim_{t\to t_0} x(t) = 0$. Ainsi, il existe une suite $(\tau_n)_n$ qui tend en croissant vers t_0 telle que la suite $(x(\tau_n))_n$ tend en décroissant vers 0.

Notons $c(t_0) = (x(t_0), y(t_0) = (0, y_0)$. Soit $y \in [-1,1]\backslash\{y_0\}$. Soit $z > 0$ tel que $\sin(z) = y$. Pour tout n, il existe un entier k_n assez grand pour que $x_n := \dfrac{1}{2\pi kn + z} < x(\tau_n)$. Comme $0 = x(t_0) < x_n < x(\tau_n)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la 1ere projection x, il existe $t_n \in [\tau_n, t_0]$ tel que $x(t_n) = x_n$. On a alors $c(t_n) = (x_n, \sin(2\pi kn + z)) = (x_n, y)$. Ainsi la suite t_n tend vers t_0 et $c(t_n)$ tend vers $(0,y) \neq c(t_0)$. Contradiction.

Proposition 7.2.7. ***(Théorème de passage à la douane)****. Soit (X,T), un espace topologique. Toute partie connexe (connexe par arcs) B qui rencontre à la fois l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ et l'extérieur $X \setminus A$ d'une partie A rencontre sa frontière $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A}\setminus \overset{\circ}{A}$.*

Lemme 7.2.8. ***(Important)*** *Un ouvert connexe par arcs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie $n \geq 2$, reste connexe par arcs même si on lui enlève l'intérieur d'une boule fermée contenue dans U.*

Preuve En effet, soit U un tel ouvert connexe par arcs, et $B_f(p,r) \subset U,\ r > 0,\ p \in U$ une boule fermé de U. Comme E est un espace vectoriel normé alors $\overset{\circ}{\widehat{B_f(p,r)}} = B_o(p,r)$. On pose $V = U \setminus B_o(p,r)$ Soient x et y sur V. Il existe un chemin γ de x à y (donc $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$), dans U. Si le chemin ne rencontre pas $B_o(p,r)$ c'est gagné. Sinon, on note $E = \gamma^{-1}\big(B_f(p,r)\big) \subset [0;1]$ c'est un ensemble compact (fermé par continuité de γ, et borné) donc on regarde le maximum $\bar{t}$ et le minimum $\underline{t}$. Necessairement

$\gamma(\bar{t}), \gamma(\underline{t}) \in S(p,r) = B_f(p,r) \setminus B_o(p,r)$ (d'après le théorème de passage à la douane) et cette sphère est connexe par arcs (d'après le lemme de connexité des sphère). Il reste enfin à définir un chemin entre x et y par morceaux :

dessin

1. les points x et $\gamma(\underline{t})$ sont reliés par γ.
2. par connexité par arcs, il existe un chemin sur la sphère $S(p,r) = B_f(p,r) \setminus B_o(p,r)$ qui relie $\gamma(\bar{t})$ à $\gamma(\bar{t})$;
3. et enfin $\gamma(\bar{t})$ et y sont reliés via γ.

ce qui achève la construction d'un chemin continu entre x et y. □

Corollaire 7.2.9. *Un ouvert connexe par arcs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie $n \geq 2$, reste connexe par arcs même si on lui enlève un nombre fini de points.*

Preuve

En effet, soit U un tel ouvert connexe par arcs, et $p_i,\ 1 \leq i \leq n$ des point de U. Soient $x, y \in V = U \setminus \{p_i,\ 1 \leq i \leq n\},\ x \neq y$. Comme U est ouvert, il existe n boules fermées $B_f(p_i, r_i) \subset U,\ r_i > 0,\ 1 \leq i \leq n$. On considère $\rho_{xy} = \min\{\frac{r_i}{2}, \frac{||x-p_i||}{2}, \frac{||y-p_i||}{2},\ 1 \leq i \leq n\}$, alors les boules fermées $B_f(p_i, \rho) \subset U,\ \rho_{xy} > 0,\ 1 \leq i \leq n$ ne contiennent ni x ni y . On sait que $V_{i,xy} = U \setminus B_o(p_i, \rho_{xy})$ est connexe par arcs d'aprés le lemme précédent. Donc, $\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{i,xy}$ contient x et y, et est connexe par arcs. Ainsi $\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{i,xy} = U \setminus \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_o(p_i, \rho_{xy})\right)$ est un partie connexe par arcs de $V = U \setminus \{p_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ et contenant x et y. □

Applications

Exemple 7.2.1. *Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$) ne sont pas homéomorphes.*

Solution

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un homéoomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alors $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \setminus f(0)$. Mais, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arcs alors que $\mathbb{R} \setminus f(0)$ n'est pas connexe par arcs, ce qui est impossible d'après l'homéomorphisme.

Exemple 7.2.2. *Montrer que l'espace métrique* $\mathcal{S}^1 = \{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$ *avec la métrique induite par l'inclusion dans* $(\mathbb{R}^2, T_u)$ *n'est homéomorphe à aucun interval (segment) de* $\mathbb{R}$ *(2eme méthode : voir la 1ere méthode dans la serie 2 du chap2 avec les projections stéréographiques).*

<u>Solution</u>

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un homéoomorphisme $g : \mathcal{S}^1 \to I$ *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *alors* $\mathcal{S}^1 \setminus \{P\}$ *est homéomorphe à* $I \setminus \{g(P)\}$. *Quitte à composer avec une rotation, on peut supposer que* $g(P)$ *n'est pas une borne de l'intervalle* I. *Comme,* $\mathcal{S}^1 \setminus \{P\}$ *est connexe par arcs alors que* $I \setminus \{g(P)\}$ *n'est pas connexe par arcs alors on a une contradiction d'après l'homéomorphisme.*

Remarque

Le théorème de **Jordan** pour la sphère $\mathcal{S}^2$ affirme que si une partie A de la sphère $\mathcal{S}^2$ est homéomorphe à un cercle $\mathcal{S}^1$, le complémentaire de cette partie dans la sphère admettra deux composantes connexes. Nous admettrons ce théorème difficile dont une preuve simplifiée est proposée dans les deux références ci-dessous. On en déduit que le tore $\mathbb{T}^1 \simeq \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ n'est pas homéomorphe à la sphère $\mathcal{S}^2$.

- Dieudonne, J. Eléments d'analyse, tome I (fondements de l'analyse moderne) Gauthier-Villars, Paris, 1968

-Dugundji, J. Topology. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

7.3 Espaces localement connexes (par arcs)

Définition 7.3.1. ***proposition*** *Un espace* (X, T) *est dit localement connexe en l'un de ses points* x *si* x *a une base de voisinages connexes, c'est-à-dire si tout voisinage de* x *contient un voisinage connexe de* x. *Un espace localement connexe en chacun de ses points est dit localement connexe.*

Donc X *est localement connexe si*

$\forall x \in X, \forall V$ *voisinage de* $x, \exists U \subset V$, U *voisinage de* x *et* U *connexe.*

Exemple 7.3.1. .

1. *$\mathbb{R}$ est connexe et localement connexe ; $\mathbb{Q}$ n'est ni connexe, ni localement connexe.*
2. *Dans $\mathbb{R}$, la réunion de deux intervalles ouverts disjoints est un espace non connexe mais localement connexe. Plus généralement, une réunion disjointe finie ou dénombrables d'intervalles de $\mathbb{R}$ est localement connexe.*

Définition 7.3.2. *Un espace est localement connexe par arcs si tout point admet une base de voisinages connexes par arcs.*

Donc X est localement connexe par arcs si
$\forall x \in X, \forall V$ *voisinage de* $x, \exists U \subset V,$ U *voisinage de* x *et* U *connexe par arcs.*

Lemme 7.3.1.
1. *Dans un espace localement connexe les composantes connexes sont à la fois ouvertes et fermées*
2. *Dans un espace localement connexe par arcs les composantes connexes par arcs sont à la fois ouvertes et fermées.*

Lemme 7.3.2. *Un espace X localement connexe par arcs et connexe est connexe par arcs.*

S'il n'est pas connexe, chacune de ses composantes connexes est ouverte, fermée, et connexe par arcs.

Preuve

En effet, on a remarqué ci-dessus que dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes par arcs sont ouvertes et fermées. Puisque X est connexe, la composante connexe par arcs d'un $x \in X$ doit être X tout entier

Exemple 7.3.2. ***Un exemple d'espace connexe et non localement connexe****.*

Un espace peut être connexe sans être localement connexe : c'est le cas du peigne $\mathcal{P}$ des topologues. Il est connexe, même par arcs. Mais si l'on prend un point de la forme $(y, 0) \in \mathcal{P}, 0 < y < 1$, toute boule de la forme $B_\circ\big((y,0), r = \frac{y}{2}\big)$ contient une infinité de segments disjoints de la forme $\{(\frac{1}{n}, z),\ |z-y| < r\}$, donc n'est pas connexe.

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathcal{D}_x$ le segment de droite d'extrémités $(0,1)$ et $(x,0)$. (<u>Faire un dessin</u>).

La réunion D des $\mathcal{D}_x$ quand x décrit $\mathbb{Q}$ est connexe car connexe par arcs. En effet deux points de $a, b \in \mathcal{D}_x$ sont reliés par un segement continu dans $\mathcal{D}_x$. Maintenant si $a \in \mathcal{D}_x$ $b \in \mathcal{D}_{x'}$ avec $x \neq x'$ alors on peut les reliés par un chemin passant par le sommet $(0,1)$.

D est non localement connexe car le sommet n'as pas voisinage connexe.

Chapitre 8

Espaces de fonctions continues

8.1 Preliminaires

Topologie de la convergence uniforme (t.c.u)

Soient A un ensemble et (E,d) un espace métrique. Soit $\mathcal{B}(A,E)$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans E. Alors (voir chap1)

$$d_\infty(f,g) = d_u(f,g) = \sup_{x\in A}\big\{d(f(x),g(x))\big\}$$

est une distance sur $\mathcal{B}(A,E)$ appelée la distance de la convergence uniforme sur A et $\mathcal{B}(A,E)$ muni de la topologie induite par cette distance est noté $\mathcal{B}_u(A,E)$.

On peut généraliser à des fonctions non nécessairement bornées en remplacant d par une idstance équivalente mais bornée telle que $\delta(u,v) = \min\big(1, d(u,v)\big)$.

8.2 Théorème de Stone-Weierstrass et Applications

Topologie c.u sur l'espace des fonction continues sur un compact

Soit X un espace topologique compact $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue alors $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc est fermé et borné. Par suite on peut munir l'espace $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ de la distance de la convergence uniforme sur X et l'espace métrique résultant est notée : $\mathcal{C}_u(X,\mathbb{R})$.

Dans cette parties on applique les résultats des chapitre précédents aux espaces des fonctions continues.

Approximation des fonctions continues

Théorème 8.2.1. ***(Théorème de Dini)***. *Soient X un espace topologique compact et $(f_n)_n$ une suite croissante (ou décroissante) de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue g. Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément*

Lemme 8.2.2. *La suite de polynomes réels définie par récurrence par $P_1 = 0$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - P_n^2(t)\big), n \leq 1$. est croissante et converge uniformément vers la fonction $\rho : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{t}$.*

Preuve Montrons pa recurrence que $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t},\ \forall t \in [0,1]$. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons la relation vrai pour l'ordre n. Alors un caclcul simple montre que

$\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = \big(\sqrt{t} - P_n(t)\big)\big(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} + P_n(t)\big)\big)$

par suite $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t},\ \forall t \in [0,1]$. Maintenant, comme $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - P_n^2(t)\big), n \leq 1$, alors la suite est croissante, positive et bornée, ce qui implique qu'elle converge simplement vers une fonction g qui, d'après doit vérifier $g(t) = g(t) + \frac{1}{2}\big(t - g^2(t)\big) \Rightarrow g(t) = \sqrt{t}$. Par suite le Théorème de Dini permet de conclure à la convergence uniforme. □

NOTA BENE Le théorème qui suit est un résultat fondamental en analyse. Il a de très nombreuses applications en analyse. Il a plusieurs versions, mais nous donnons la version dite "forte" : c'est la cas d'une catégorie de sous-algèbres de $\mathcal{C}_u(X,\mathbb{R})$ oǜ X est compact. Ce théorème s'appelle Théorème d'Approximation de Stone-Weierstrass ou Théorème de Densité de Stone-Weierstrass.

Définition 8.2.1. *On dit que $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre si elle est stable par addition, multiplication et multiplication par un scalaire, c'est-à-dire $f+g \in A$, $fg \in A$, $\lambda g \in A$, pour tout $f,g \in A, \lambda \in \mathbb{R}$. En particulier, si A est une algèbre, $f \in A$ et $P(x)$ est un polynôme à coefficients réels sans terme constant $P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, alors on a $P(f) = \sum_{i=1}^n a_i f^i \in A$.*

Exemples

1. L'ensemble des fonctions constantes est une algèbre.
2. Soit $x \in X$, $A = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), f(x) = 0\}$
3. Soient $x, y \in X$ et $x \neq y$, on pose alors $A = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), f(x) = f(y)\}$
4. Si $E = [a, b]$, l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ (restriction à $[a, b]$ d'un polynôme) est une algèbre.

Nota Bene Si $A \subset \mathcal{C}_u(X, \mathbb{R})$ est une sous algèbre, alors $\overline{A}$ est une sous algèbre (voir anneau topologique chap 2).

Définition 8.2.2. *On dit que $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sépare les points de X si pour tout $x \neq y$ dans X, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

Exemples

1. Si $X = [a, b]$, l'algèbre des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ sépare les points de $[a, b]$, il suffit de prendre $P(x) = x$.
2. Pour $x_0 \neq y_0 \in X$, $A = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), f(x_0) = f(y_0)\}$ ne sépare pas les points de X.

Théorème 8.2.3. *(**Théorème d'Approximation de Stone-Weierstrass "Cas réel"**). Soient X un espace topologique compact et $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme sur X. Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{R})$ contenant les constantes et séparant les points de X. Alors A est dense dans $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{R})$.*

Théorème 8.2.4. *(**Théorème d'Approximation de Stone-Weierstrass "Cas complexe"**).*

Soient X un espace topologique compact et $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$ muni de la distance de la convergence uniforme sur X. Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{C})$ contenant les constantes et séparant les points de X. Si $\forall f \in A$, le conjugué $\overline{f} \in A$, alors A est dense dans $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{C})$.

Preuve Comme $f, \overline{f} \in A$, alors $\mathrm{Im}(f) \in A$ et $\mathrm{Re}(f) \in A$. On a aussi $A = \mathrm{Re}(A) + i\mathrm{Im}(A)$ et comme A est une algèbre alors $\mathrm{Re}(A) = \mathrm{Im}(A) = B$ et $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{C}) = \mathcal{C}_u(X, \mathbb{R}) + i\, \mathcal{C}_u(X, \mathbb{R})$.

D'après le cas réel, B est dense dans $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{R})$ donc $A = B + iB$ est dense dans $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{C}) = \mathcal{C}_u(X, \mathbb{R}) + i\, \mathcal{C}_u(X, \mathbb{R})$.

□

Applications

Proposition 8.2.5. .

1. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Toute fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, est limite uniforme (sur K) d'une suite de polynômes.*
2. *Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodique de période 2π est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques.*
3. *Si X est un espace métrique compact, les espaces métriques $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_u(X, \mathbb{C})$ sont séparables.*

Preuve

1. On donne la preuve dans le cas de $\mathbb{C}$, le cas réel c'est analogue. L'ensemble $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$ des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients complexes est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_u(K, \mathbb{C})$, $K \subset \mathbb{R}^d$ et qui contient le polynôme constant 1, et de plus si $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$, alors $\overline{P} \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$ (où $\overline{P}$ est le polynôme ayant comme coefficients les conjugués des coefficients de P). Séparons les points de K : si $x = (x_1, \ldots, x_d) \neq y = (x_1, \ldots, y_d)$ alors il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, on prend alors le plynome $P = X_{i_0}$ qui va séparer x et y. Enfin on applique le théorème d'Approximation de Stone-Wiertrass Cas complexe.
2. Montrer que toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodique de période 2π est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques.

   Etape 1

   Considérons maintenant $X = \mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$, et prenons pour A l'algèbre (complexe) engendrée par les applications $z \mapsto 1$, $z \mapsto z$, $z \mapsto \overline{z}$. Il est évident que les éléments de A sont de la forme $z \mapsto f(z) = \sum_{n=-N}^{N} c_n z^n$, $N \in \mathbb{N}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$, car $\overline{z} = 1/z$ pour tout $z \in \mathcal{S}^1$. Il est clair que l'algèbre A contient la fonction constante 1 (par construction), sépare les points (on peut prendre $z \mapsto z$)

Soit $f \in A$ alors $f(z) = \sum_{n=-N}^{N} c_n z^n \Rightarrow$
$\overline{f(z)} = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n}\overline{z^n} = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} z^{-n} = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_{-n}} z^n \Rightarrow \overline{f} \in A$

Alors d'après le théorème de d'Approximation Stone-Weierstrass, toute application continue de $\mathcal{S}^1$ dans $\mathbb{C}$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales de A.

Etape 2

On designe par $\Omega = \{g \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ g \text{ est } 2\pi\text{periodique}\}$. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}^1 : t \mapsto \exp(it) = e^{it}$ alors φ est surjective (voir le tore de dimension 1 : il induit par restriction un homémorphisme : $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq [-\pi,\pi]/\{-\pi,\pi\} \simeq \mathcal{S}^1$).

Soit $\Psi : \mathcal{C}_u(\mathcal{S}^1,\mathbb{C}) \to \Omega = \{g \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ g \text{ est } 2\pi\text{periodique}\} : f \mapsto f \circ \phi$

Alors Ψ est un ismomorphisme d'algèbre. Comme toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-péeriodique est bornée, alors $||f||_\infty = ||f||_u = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||f(t)|| = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} ||f(t)||$, donc Ψ est un ismomorphisme est une isométrie.

On pose $B = \Psi(A)$ alors $B = \{g(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} / N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R},\ c_n \in \mathbb{C}\}$ correspond bien à l'ensemble des polynômes trigonométriques. Par suite toute application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique, est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales trigonomt́riques.

3. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on remarque qu'il suffit de faire la preuve pour $\mathcal{C}_u(X,\mathbb{R})$. Soit $(U_n)_n$ une base dénombrable pour la topologie de X et soit $g_n(x) = d(x, X \setminus U_n)$ qui est continue . Soit $A_\mathbb{Q}$ l'algébre engendré, sur $\mathbb{Q}$, par les g_n. Il est clair que, si A est l'algébre engendrée sur $\mathbb{R}$ par les g_n, alors $A_\mathbb{Q}$ est uniformément dense dans A. Comme $A_\mathbb{Q}$ est dénombrable, il nous suffit de montrer que A est dense dans $\mathcal{C}_u(X,\mathbb{R})$. Comme A contient les constantes, d'après le Théorème de Stone-Weierstrass "Cas réel", il suffit de voir que A sépare les points de X. Or, si $x \neq y$, il existe U_n tel que $x \in U_n$ et $y \notin U_n$, ce qui implique $g_n(x) \neq 0$ et $g_n(y) = 0$.

$\square$

On a vu dans le (1) de la proposition ci-dessus que toute fonction continue sur $K \subset \mathbb{R}^d$ est limite uniforme (sur K) d'une suite de polynômes. Comment trouver conretement une suite de polynomes ? Dans l'exercice suivant, on va voir les polynômes de Bernstein pour les fonction continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8.2.1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$. et $k \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq k \leq n$, on note $B_{n,k}$ le polynome de Bernstein defini par $B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.*

1. *calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x)$.*
2. *En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(x - \frac{k}{n}\big)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$.*
3. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $n \leq 1$, on note $B_n(f)$ le polynome defini par $B_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k/n)B_{n,k}(x)$.*
4. *Montrer que la suite de fonctions $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.*

A faire.

8.3 Equicontinuité, Théorème d'Ascoli et Applications

Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ des fonctions continues muni de la distance $d_u = d_\infty$ de la convergence uniforme est l'espace métrique $\mathcal{C}_u(X,Y)$. Dans le cas où $(Y,\delta) = (E, ||.||)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $\mathcal{C}_u(X,E)$ est un espace vectoriel normé de dimension infinie (sauf cas trés particulier où X est fini où $Y = \{0\}$).

La question que l'on se pose est l'identification des parties compactes de $\mathcal{C}_u(X,Y)$.

Avec le Théorème de Riesz (voir chap1) dans le cas où $(Y,\delta) = (E, ||.||)$, on sait que les fermées bornées ne conviennent pas. Ainsi, il ne suffit pas de majorer uniformément les fonctions.

Définition 8.3.1. *Soient (X,d) est un espace métrique compact et (Y,δ) un espace métrique. On dit qu'une partie G de $\mathcal{C}_u(X,Y)$ est ponctuellement relativement compacte si pour tout $x \in X$, l'ensemble $G_x = \{f(x); f \in G\}$ est relativement compact dans (Y,δ).*

Définition 8.3.2. *Pour deux espaces métriques (X,d) et (Y,δ), on dit qu'une partie H de $\mathcal{C}(X,Y)$ est équicontinue sur X, (ou encore également uniformément continue sur X) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x,y \in X \big(d(x,y)\alpha \Rightarrow \big[\forall f \in H,\ \delta\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon\big]\big)$$

Proposition 8.3.1. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On suppose que X est compact.*

1. *Si K est un compact de $\mathcal{C}_u(X, Y)$ alors K est équicontinue et ponctuellement relativement compact.*
2. *Si G est relativement compact dans $\mathcal{C}_u(X, Y)$ alors K est équicontinue et ponctuellement relativement compact.*

Preuve : Découle de la définition précédente et de la remarque ci-dessus. □

Le proposition préecédent nous donne une condition nécessaire à la compacité dans $\mathcal{C}(X, Y)$.

On va voir que **les propriétés d'équicontinuité et de relative compacité ponctuelle sont suffisantes** pour caractériser les parties relativement compactes de $\mathcal{C}(X, Y)$, ce qui constitura une généralisation des concepts du Théorème de Riesz. La relative compacité est plus commode dans le sens où les parties d'une partie équicontinue sont équicontinues et où la relative compacité se transmet aux sous-ensembles.

Rappelons le résultat suivant d'abord.

Lemme 8.3.2. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Le thérème suivant, est appellé **Théorème d'Ascoli** et a plusieurs versions.

Théorème 8.3.3. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On suppose que X est compact.*

G est relativement compact dans $\mathcal{C}_u(X, Y)$ si et seulement si G est équicontinue et ponctuellement relativement compact.

Applications

Exercice 8.3.1. *Soient $k : \mathcal{C}([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$ et (f_n) une suite bornée de $C([a, b], \mathbb{R})$, muni de la norme $||.||_\infty = ||.||_u$.*

On définit $K : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ par $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $(Kf)(x) = \displaystyle\int_a^b k(x, t) f(t) dt$.

1. *Montrer que $A = \{Kf_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.*
2. *Montrer que $A = \{Kf_n, n \in \mathbb{N}\}$ est ponctuellemenet relativement compact.*

3. *Montrer que* $(Kf_n)_n$ *admet une suite extraite convergente dans* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Solution : voir annexe dernier chapitre.

Chapitre 9

Espaces de Banach et Espaces de Hilbert

9.1 Espaces de Banach

On a déjà rencontré beaucoup de résultats dans les espaces de banach (evn complet). Dans cette section on complète en donnant quelques outils dont le théorème de Hann-Banach et la cract{erisation des espaces de Banach par la convergence des series normalement convergentes. Ces outils permettent d'aborder le cours d'analyse fonctionnelle.

Théorème 9.1.1. *(Rappel) Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \longrightarrow F$ une application lineaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est unifrmément continue sur E ;*
2. *f est continue sur E ;*
3. *f est continue en un sel point.*
4. *$\exists\ M > 0\ /\ \forall\ x \in E,\ ||f(x)||_E \leq M||x||_E$.*
5. *f est bornée sur la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ de E : .*
6. *f est bornée sur sphère unité $\mathcal{S}(0, 1)$ de E.*
7. *f est bornée sur toute partie bornée de E.*

Preuve Voir chapitre 1 □

Nota Bene : Si E est un espace vectoriel normé alors E est un espace vectoriel topologique.

Proposition 9.1.2. *Soient E et F, deux espaces vectoriels normés sur $K = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.*

Si E est de dimension finie alors toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

Proposition 9.1.3. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\sup_{||x||_E\ =1} ||f(x)||_F = \sup_{||x||_E \leq 1} ||f(x)||_F$*

Définition 9.1.1. *Un espace vectoriel **normé complet** est appelé espace de **Banach***

Lemme 9.1.4.
1. *Tout sous-espace vectoriel (sev) fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*
2. *Tout espace vectoriel normé (evn) de dimension finie est un espace de Banach.*

Preuve :

1. Découle du fait que sous-espace vectoriel (sev) fermé d'un espace complet est complet (chap1).
2. On a déjà montrer que (chap1) que si E est un espace vectoriel normé de dimension finie (muni de l'une des normes usuelles), alors E estcomplet.

$\square$

Regardons maintenant les différentes versions de la topologie de la convergence uniforme sur un espace de Banach.

Si E est est un espace de Banach, on peut considérer la distance induite par sa norme et dans ce cas on a les espaces suivant.

Soient A un ensemble et $(E, ||.||_E)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans E. Alors

$$||f||_\infty = ||f||_u = ||f||_{\mathcal{B}} = \sup_{x \in A} \left\{ ||f(x)||_E \right\}$$

est une norme sur $\mathcal{B}(A, E)$ appelée norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}(A, E)$ muni de la topologie induite par cette distance est noté $\mathcal{B}_u(A, E)$ où $\mathcal{B}_\infty(A, E)$.

On a les cas particuliers suivants.

1. Si (X, d) est un espace métrique, on note par $\mathcal{C}_b(X, E)$, l'espace vectoriel normé des applications continues bornées, muni de la topologie de la convergence uniforme.
2. Si F est un espace vectoriel de dimension finie, on note par $\mathcal{C}_{\rightharpoonup 0}(F, E)$, l'espace vectoriel normé des applications continues tendant vers 0 à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme.
3. Si (K, d) est un espace métrique compact, on note par $\mathcal{C}(K, E)$, l'espace vectoriel normé des applications continues, muni de la topologie de la convergence uniforme.
4. Si F est un espace vectoriel normé, on note par $\mathcal{L}_c(F, E)$ l'espace vectoriel normé des applications lin'aires continues, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Proposition 9.1.5. ***(Exemples à connaitre)****.*

Soit E, un espace de Banach.

1. *L'espace $\mathcal{B}_u(A, E)$, muni de la norme de la convergence uniforme est un Banach.*
2. *Si (X, d) est un espace métrique, l'espace $\mathcal{C}_b(X, E)$ est fermé dans $\mathcal{B}_u(X, E)$, donc est un Banach.*
3. *Si (K, d) est un espace métrique compact, alors $\mathcal{C}(K, E) = \mathcal{C}_b(K, E)$, donc est un Banach.*
4. *Si F est un espace vectoriel de dimension finie, l'espace $\mathcal{C}_{\rightharpoonup 0}(F, E)$ est fermé dans $\mathcal{B}_u(F, E)$, donc est un Banach.*
5. *Si F est un espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\mathcal{L}_c(F, E)$ est est un espace de Banach. En particulier, l'espace vectoriel des formes linéaires continues $E^* = \mathcal{L}_c(E, K)$ (dual topologique de E) est un espace de Banach.*

Exemple 9.1.1. ***(Autres exemples)***

Soit $l^2 = \{(x_n)_{n>0}, x_n \in \mathbb{R}; \sum_{n>0} x_n^2 < 1\}$=ensemble des suites réelles de carré sommable. On considère l'application qui à $x, y \in l^2$ associe $\langle x, y\rangle >= \sum_{n>0} x_n y_n$. Ce nombre est bien défi (en effet, $2|x_n y_n| \leq x_n^2 + y_n^2$ donc la série est absolument convergente donc convergente). L'application $\langle ., .\rangle >$ est donc bien définie, symétrique, définie et positive : c'est un produit scalaire sur l^2. La norme induite est $||x||_{l^2} = \sum_{n>0} x_n^2$ et l^2 muni de cette norme est un espace complet, donc un espace de Banach.

Définition 9.1.2. *Soit E un espace vectoriel réel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application telle que :*

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in E$
2. $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall \lambda \in K, \forall x \in E$

Cette application est appelée application sous-linéaire.

Le théorème de Hahn-Banach (Hans Hahn et Stefan Banach), est un théorème d'existence de prolongements de formes linéaires satisfaisant à certaines conditions. Il permet de prouver abstraitement l'existence de nombreuses fonctions continues en analyse fonctionnelle. Il a une interprétation géométrique en termes d'hyperplans (évitant un convexe fixé), et dans ce cas il joue un rôle fondamental en analyse convexe).

Théorème 9.1.6. ***(Théorème de Hahn-Banach)*** *Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et H un sous-esapce vectoriel de E. Soit $\mu : H \to K$, une forme linéaire.*

1. *Si $K = \mathbb{R}$ et s'il existe une application sous-linéaire $p : E \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in H,\ \mu(x) \leq p(x)$. Alors il existe un prolongement linéaire $\overline{\mu} : E \to \mathbb{R}$ de μ tel que $\forall x \in H,\ \overline{\mu}(x) \leq p(x)$ et $\overline{\mu}|_H = \mu$ par restriction.*
2. *Si $K = \mathbb{C}$ et s'il existe une application $p : E \to \mathbb{R}$ telle que*
   (a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in E,$
   (b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)\ \forall \lambda \in K, \forall x \in E$
   (c) *et* $\forall x \in H,\ |\mu(x)| \leq p(x).$

   Alors, il existe un prolongement linéaire $\overline{\mu} : E \to \mathbb{C}$ de μ tel que $\forall x \in H,\ |\overline{\mu}(x)| \leq p(x)$ et $\overline{\mu}|_H = \mu$ par restriction.

Preuve

1. Cas réel

   Soit $x_0 \notin H$ et posons $H_1 = H \oplus \mathbb{R}x_0$ et proplongeons μ à H_1 par μ_1.

   Comme $\mu_1|_H = \mu$ il suffit de déterminer $\mu_1(x_0)$.

   — comment choisir $\mu_1(x_0)$? Cherchons les conditions suffisantes. Pour cela supposons que μ_1 est le prolongement de μ. Alors

$\forall y \in H,\ \mu_1(y+x_0) \leq p(y+x_0) \quad \text{et} \quad \mu_1(y-x_0) \leq p(y-x_0)$

$\Rightarrow \forall y \in H,\ \mu_1(y)+\mu_1(x_0) \leq p(y+x_0) \quad \text{et} \quad \mu_1(y)-\mu_1(x_0) \leq p(y-x_0)$ (par linéaritté)

$\Rightarrow \forall y \in H,\ \mu_1(x_0) \leq p(y+x_0)-\mu_1(y) \quad \text{et} \quad \mu_1(x_0) \geq \mu_1(y)-p(y-x_0)$

$\Rightarrow \forall y \in H,\ \mu_1(y)-p(y-x_0) \leq \mu_1(x_0) \leq p(y+x_0)-\mu_1(y)$

$\Rightarrow \forall y \in H,\ \mu(y)-p(y-x_0) \leq \mu_1(x_0) \leq p(y+x_0)-\mu(y)$ car $\mu_1|_H = \mu$

$\Rightarrow \sup_{y\in H}\{\mu(y)-p(y-x_0)\} \leq \mu(x_0) \leq \inf_{y\in H}\{p(y+x_0)-\mu(y)\}$

Donc si μ_1 est le prolongement de μ, alors

$$\alpha = \sup_{y\in H}\{\mu(y)-p(y-x_0)\} \leq \beta = \inf_{y\in H}\{p(y+x_0)-\mu(y)\}$$

— Montrons alors que $\alpha = \sup_{y\in H}\{\mu(y)-p(y-x_0)\} \leq \beta = \inf_{y\in H}\{p(y+x_0)-\mu(y)\}$ avec les hypothèses du théorème.

$\forall y_1, y_2 \in H, \mu(y_1+y_2) \leq p(y_1+y_2) = p\big((y_1+x_0)+(y_2-x_0)\big) \leq p\big(y_1+x_0\big)+p\big(y_2-x_0\big)$

$\Rightarrow \forall y_1, y_2 \in H, \mu(y_1)+\mu(y_2) \leq p\big(y_1+x_0\big)+p\big(y_2-x_0\big)$

$\Rightarrow \forall y_1, y_2 \in H, \mu(y_1)+\mu(y_2) \leq p\big(y_1+x_0\big)+p\big(y_2-x_0\big)$

$\Rightarrow \forall y_1, y_2 \in H, \mu(y_2)-p\big(y_2-x_0\big) \leq p\big(y_1+x_0\big)-\mu(y_1)$

$\Rightarrow \alpha = \sup_{y_2\in H}\{\mu(y_2)-p(y_2-x_0)\} \leq \beta = \inf_{y_1\in H}\{p(y_1+x_0)-\mu(y_1)\}$

— Choissions alors un point $a \in [\alpha, \beta]$ et posons

$\mu_1(x_0) = a$ et $\forall y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mu_1(y+\lambda x_0) = \mu(y)+\lambda a.$

Ainsi μ_1 est linéaire et $\mu_1|_H = \mu$.

Maintenant vérifions que $\mu_1(y+\lambda x_0) \leq p(y+\lambda x_0)$.

(*) Si $\lambda > 0$, comme $\mu_1(x_0) = a \leq \beta = \inf_{y\in H}\{p(y+x_0)-\mu(y)\}$, alors

$\mu_1(x_0) = a \leq p(\dfrac{y}{\lambda}+x_0)-\mu(\dfrac{y}{\lambda}) \Rightarrow \mu_1(x_0)+\mu(\dfrac{y}{\lambda}) \leq p(\dfrac{y}{\lambda}+x_0) \Rightarrow$
$\mu_1(x_0+\dfrac{y}{\lambda}) \leq p(\dfrac{y}{\lambda}+x_0) \Rightarrow \mu_1(\lambda x_0+y) \leq p(y+\lambda x_0)$

(**) Si $\lambda < 0$, on pose $\gamma = -\lambda > 0$,

comme $\mu_1(x_0) = a \geq \alpha = \sup_{y\in H}\{\mu(y)-p(y-x_0)\}$, alors

$\mu_1(x_0) = a \geq \mu(\dfrac{y}{\lambda})-p(\dfrac{y}{\lambda}-x_0) \Rightarrow -\mu_1(x_0)+\mu(\dfrac{y}{\gamma}) \geq p(\dfrac{y}{\gamma}-x_0) \Rightarrow$

$\mu_1(-x_0+\dfrac{y}{\gamma}) \geq p(\dfrac{y}{\gamma}-x_0) \Rightarrow \mu_1(-\gamma x_0+y) \leq p(y-\gamma x_0) \Leftrightarrow \mu_1(\lambda x_0+y) \leq p(y+\lambda x_0)$

— On note $\mathcal{F}$, l'ensemble des couples (Ω, ω) vérifiant Ω est un sous-espace vectoriel contenant H et ω est une forme linéaire sur Ω qui prolonge μ.

Alors $\mathcal{F}$ est non vide d'apès la construction de μ_1 ci-dessus.

On ordonne $\mathcal{F}$ par $(\Omega_1, \omega_1) \preceq (\Omega_2, \omega_2) \Leftrightarrow \Omega_1 \subseteq \Omega_2$ et ω_2 prolonge ω_1 à Ω_2.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ une partie totalement ordonnée. On pose $\overline{\Omega} = \bigcup_{(\Omega,\omega)\in\mathcal{A}} \Omega$. Comme la suite des sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ est une suite croissante, alors $\overline{\Omega}$ est un sous-espace vectoriel. On définit $\overline{\omega}$ par restriction : $\overline{\omega}|_{\Omega} = \omega$, alors $\overline{\omega}$, est bien une forme linéaire. Par suite $\sup \mathcal{A} = (\overline{\Omega}, \overline{\omega}) \in \mathcal{F}$.

D'après le lemme de Zorn, toute partie ordonnée, inductive, admet un élément maximal. Soit alors (Ω, ω) un élément maximal de $\mathcal{F}$.

Montrons par l'absurde que $\Omega = E$. Supposons qu'il existe $x_0 \in E \setminus \Omega$, alors dáprès la construction ci-dessus, il existe une forme linéaire ω_1 qui prolonge ω à $\Omega_1 = \Omega \oplus \mathbb{R}x_0$, ce qui est absurde par maximalité de (Ω, ω).

2. Cas complexe On pose $\mu = g + ih$, avec g, h formes linéaires rélles sur H considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   Alors $\mu(ix) = g(ix) + ih(ix)$ et par $\mathbb{C}$-linéairité,

   $\mu(ix) = i\mu(x) = i[g(x) + ih(x)] = ig(x) - h(x) \Rightarrow h(x) = -g(ix) \Leftrightarrow h(ix) = g(x)$.

   Ansi on peut traviller avec g ou h.

   Prolongeons g en G à E, alors $|G(x)| \leq p(x)\ \forall x \in E$.

   Posons $\overline{\mu}(x) = G(x) - iG(ix)$, montrons que $\overline{\mu}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

   On a $\overline{\mu}(ix) = G(ix) - iG(-x) = G(ix) + iG(x) = i[G(x) - iG(ix)] = i\overline{\mu}(x)$ et si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,

   $\overline{\mu}(\lambda x) = \overline{\mu}\big((a+ib)x\big) = a\overline{\mu}(x) + b\overline{\mu}(ix) = a\overline{\mu}(x) + b\overline{\mu}(ix) = a\overline{\mu}(x) + ib\overline{\mu}(x)$
   $= (a+ib)\overline{\mu}(x) = \lambda\overline{\mu}(x)$.

   Vérifions que $|\overline{\mu}(x)| \leq p(x)$. Soit θ_x l'argument de $\overline{\mu}(x)$, alors $e^{i\theta_x}\overline{\mu}(x)$ est un réel positif. Alors, $|\overline{\mu}(x)| = |e^{i\theta_x}\overline{\mu}(x)| = e^{i\theta_x}\overline{\mu}(x) = G\big(e^{i\theta_x}x\big) - iG\big(e^{i\theta_x}.ix\big) = G\big(e^{i\theta_x}x\big)$ car $e^{i\theta_x}\overline{\mu}(x)$ est réel.

   Donc, $|\overline{\mu}(x)| = G\big(e^{i\theta_x}x\big) \leq p(e^{i\theta}x) = |e^{i\theta}|.p(x) = p(x)$.

$\square$

Corollaire 9.1.7. *Soit E, un espace vectoriel normé et H, un sous-espace vectoriel de E.*

Soit μ, une forme linéiare continue sur H. Alors, il existe $\overline{\mu}$, une forme linéiare continue sur E telle que $\overline{\mu}|_H = \mu$ et $||\overline{\mu}||_E = ||\mu||_H$.

<u>On retient</u> *Toute forme linéaire continue sur un sous-espace H d'un espace vectoriel normé E se prolonge en une forme linéaire continue sur E tout entier, avec la même norme.*

Preuve On pose $p(x) = ||\mu||_H.||x||_E$, alors p est sous-linéaire. Ansi, par le théorème de Hanh-Banach, il existe $\overline{\mu}$ forme linéaire sur E telle que $\forall x \in E$, $|\overline{\mu}(x)| \leq p(x)$, et on a $|\overline{\mu}(x)| \leq p(x) = ||\mu||_H.||x||_E$ et $||\overline{\mu}||_E = ||\mu||_H$.

□

Corollaire 9.1.8. *Soit E, un espace vectoriel normé et $x_0 \in E, x_0 \neq 0$, Alors, il existe une forme linéaire continue $\overline{\mu}$ sur E telle que $||\overline{\mu}||_E = 1$ et $\overline{\mu}(x_0) = ||x_0||$.*

<u>Noter</u> *que si la norme provient d'un prosuit scalaire et l'espace E est complet (=Espace de Hilbert) alors on sait déterminer $\overline{\mu}$ explicitement en fonction de x_0 (c'est le théorème de représentation de Riesz de la sous section suivante).*

Preuve Soit $H = Kx_0$ ($K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) le sous-esapce vectoriel engendré par x_0. On définit μ sur H par $\mu(\lambda x_0) = \lambda ||x_0||$, $\lambda \in K$ alors $||\mu||_H = 1$. Alors, μ est borné, donc continue ainsi, on a le résultat d'après le corollaire précédent.

□

Corollaire 9.1.9. *Soit E, un espace vectoriel normé et H un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> <u>et différent de E et 0</u>. Alors, pour tout $x_0 \in E \setminus H$, il existe une forme linéaire $\overline{\mu}$ sur E telle que $\overline{\mu}(H) = \{0\}$, $\overline{\mu}(x_0) = 1$ et $||\overline{\mu}||_E = \dfrac{1}{d(x_0, H)}$ où $d(x_0, H) = \inf\{||x_0 - h||,\ h \in H\}$.*

Preuve Soit $H_1 = H \oplus Kx_0$ ($K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). On pose $\mu(y + \lambda x_0) = \lambda$. On a $||y + \lambda x_0||_E = |\lambda|.||\frac{y}{\lambda} + x_0||_E \geq |\lambda|.d(x_0, H)$. On sait que $d(x_0, H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \overline{H} = H$ car H est fermé, or $x_0 \notin H$ donc $d(x_0, H) \neq 0$. Ainsi

$$\frac{||y + \lambda x_0||_E}{d(x_0, H)} \geq |\lambda| = |\mu(y + \lambda x_0)| \Rightarrow \frac{1}{d(x_0, H)} \geq \frac{|\mu(y + \lambda x_0)|}{||y + \lambda x_0||_E}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{d(x_0, H)} \geq \sup\big\{\dfrac{|\mu(y+\lambda x_0)|}{||y+\lambda x_0||_E}, y \in H, \lambda \in K\big\} \Rightarrow$

$$\frac{1}{d(x_0, H)} \geq ||\mu||_{H_1} \quad ((1))$$

Soit $(y_n)_n$ une suite de H telle que $0 \neq ||x_0 - y_n||_E \to d(x_0, H)$.

$|\mu(x_0 - y_n)| = 1$ donc $1 \leq ||\mu||_{H_1}.||x_0 - y_n||_E \Rightarrow \dfrac{1}{||x_0 - y_n||_E} \leq ||\mu||_{H_1}$

$\Rightarrow \sup\big\{\dfrac{1}{||x_0 - y_n||_E},\ n \in \mathbb{N}\big\} \leq ||\mu||_{H_1} \Rightarrow \dfrac{1}{\inf\big\{||x_0 - y_n||_E,\ n \in \mathbb{N}\big\}} \leq ||\mu||_{H_1}$, ainsi,

$$\frac{1}{d(x_0, H)} \leq ||\mu||_{H_1} \quad ((2))$$

De ((1)) et ((2)) on tire $\dfrac{1}{d(x_0, H)} = ||\mu||_{H_1} \quad ((2))$

Maintenant le reste découle du lemme précédent.

□

On sait que (cours de 2eme année) dans $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, les séries absolument convergentes sont convergentes ; on sait aussi qu'une s'erie normalement convergente de fonctions continues est uniforméement convergente vers une limite continue.

Définition 9.1.3. *Soit $(E, ||.||)$ evn et $(x_n)_n$ une suite de E.*

1. *On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est convergente si la suite des sommes partielles $(S_p)_p$ avec $S_p = \sum_{n=0}^{p} x_n$, est convergente.*
2. *On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est normalement convergente si la suite des sommes partielles $(D_p)_p$ avec $D_p = \sum_{n=0}^{p} ||x_n||$, est convergente.*

Théorème 9.1.10. *Soit $(E, ||.||)$ evn.*

Alors E est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Preuve

$\Rightarrow$) Supposons que E est un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de E normalemant convergente. Pour $p > q$, on a

$||S_p - S_q|| \leq || \displaystyle\sum_{n=q+1}^{p} ||x_n|| \leq || \sum_{n \geq q+1} ||x_n|| = R_q \overset{q \to +\infty}{\to} 0$. Alors $(S_p)_p$ est de Cauchy. Donc, elle converge car un espace de Banach est complet.

$\Leftarrow$) Réciproquement, soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E ; nous allons construire une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge.

Puisque $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N_1 > 1$ tel que :

$||x_n - x_m|| < \frac{1}{2}$ pour tous $m, n > N_1$,

il existe $N_2 > N_1$ tel que :

$||x_n - x_m|| < \frac{1}{2^2}$ pour tous $m, n > N_2$,

ansi de suite, on construit une suite strictement croissante $(N_k)_k$ tel que :
$||x_n - x_m|| < \frac{1}{2^k}$ pour tous $m, n > N_k$.

On en déduit que $||x_{N_k} - x_{N_{k+1}}|| < \dfrac{1}{2^k}$, $\forall k > 0$.

Donc, la série $(v_k)_k$ avec $v_k = x_{N_k} - x_{N_{k+1}}$, est normalement convergente. Par suite elle converge par hypothèse, notons v sa limite.

Mais $\sum_{k=1}^{n} v_k = x_{N_n} - x_{N_1} \Rightarrow x_{N_n} = \sum_{k=1}^{n} v_k + x_{N_1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v + x_{N_1}$. Ansi la suite extraite $(x_{N_n})_n$ converge. Comme $(x_n)_n$ est de Cauchy alors $(x_n)_n$ converge.

$\square$

9.2 Espaces de Hilbert

Dans cette partie, nous proposons une introduction aux espaces de Hilbert en donnant le Théorème de projection sur un convexe fermé, les Inégalités de Bessel et le Théorème de Représentation de Riesz.

9.2.1 Généralités

Rappelons sur le produuit scalaire sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ dé'jà exposé dans le chapitre 1.

Définition 9.2.1. ***Produit Scalaire sur*** $\mathbb{R}$

Soit E un espace vectoriel réel. Un ***produit scalaire*** *sur E est une* ***forme bilinéaire symétrique définie positive*** *sur $E \times E$. Un espace vectoriel réel de dimension finie muni dún produit scalaire est appelé* ***espace euclidien****.*

On dit que $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ *est un produit scalaire sur* E *si :*

1. $\langle \alpha u + \beta v, y \rangle = \alpha \langle u, y \rangle + \beta \langle v, y \rangle$ *et* $\langle x, \alpha' u' + \beta' v' \rangle = \alpha' \langle x, u' \rangle + \beta' \langle x, v' \rangle$ *(bilinéaire).*
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *(symétrique)*
3. $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \geq 0$ *(positive)*
4. $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(définie, non dégénéré).*

Proposition 9.2.1. .

Considérons l'application $||, || : E \to \mathbb{R} : x \mapsto ||x|| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$. *Alors on a :*

1. $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$
2. $||x+y|| = ||x||^2 + 2\langle x, y \rangle + ||y||^2$
3. $|\langle x, y \rangle|^2 \leq ||x||.||y||$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz) ;*
4. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(inégalité triangulaire) ;*
5. $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$ *(identité de la médiane où du parallélogramme).*
6. *L'application* $||, || : E \to \mathbb{R} : x \mapsto ||x|| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$ *est une norme sur* E.

$\square$

Définition 9.2.2. ***Produit Scalaire Hermitien (sur*** $\mathbb{C}$***)***

Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$.

On appelle produit scalaire hermitien sur E *toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.*

Autrement dit que $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$ *est un produit scalaire hermitien sur* E *si :*

1. *C'est une application sesquilinéaire, c'est-à-dire :* $\langle \alpha u + \beta v, y \rangle = \alpha \langle u, y \rangle + \beta \langle v, y \rangle$ *et* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *où* $\overline{z}$ *signifie le conjugué du nombre complexe* z.
2. $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \geq 0$ *(positive)*
3. $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(définie).*

Noter que le produit scalaire réel est un cas particulier du produit scalaire hermitien.

Définition 9.2.3. *Un espace vectoriel muni d'un* ***produit scalaire*** *est appelé espace* ***pré-hilbertien****. Il est équipé alors d'une norme induite par la produit scalaire tel que stupilé dans la propsotion ci-dessus.*

Un espace ***préhilbertien complet*** *(relativement à la norme associée à cet espace) est appelé espace de* ***Hilbert****.*

Anisi un espace de Hilbert est un espace de Banach. Mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 9.2.1. .

1. *Tout espace euclidien ou hermitien de dimension finie est un espace de Hilbert*
2. *L'espace* $L^2(\Omega, \mu)$ *(voir chapitre 2 sur la complétude et le cours d'intégration) est un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(s)g(s)d(s)$*. Noter que l'espace* l^2 *est un cas particulier, obtenu lorsque* $\Omega = \mathbb{N}$ *est muni de la mesure donnée par* $\mu(\{n\}) = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Définition 9.2.4. *Soient* X *et* Y *deux espaces vectoriels complexes, une application* $f : X \to Y$ *est dite antilinéaire si, pour tous* $x, y \in X$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *on a* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *et* $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$*.*

Proposition 9.2.2. *Soit* X *un espace préhilbertien, pour tout vecteur* $y \in X$ *la forme linéeaire* $l_y : x \to \langle x; y\rangle$ *est continue de* X *dans* K*. L'application* $y \to l_y$ *est antilinéaire et isométrique de* X *dans* $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})=$ *ensemble des formes linéaires de* X *dans* $\mathbb{C}$*.*

Définition 9.2.5. *Soit* H *un espace de Hilbert, on dit que les vecteurs* x *et* y *de* H *sont orthogonaux si* $\langle x, y\rangle = 0$*. Soit* $(x_n)_n$ *une suite infinie ou bien* $(x_1, \ldots, x_p)$ *une suite finie de vecteurs de* H *; on dit que la suite est orthogonale si les* x_n *sont deux à deux orthogonaux, c'est à dire si* $\langle x_m; x_n\rangle = 0$ *si* $m \neq n$*. Si de plus* $||x_n|| = 1$*, on dit que c'est une suite orthonormée.*

Quelques remarques et propriétés)

Soit X une famille de vecteurs de H, on note $F = \langle X\rangle$ le sous espace vectoriel engendré par X.

Si y est orthogonal à tous les vecteurs de X, alors y est orthogonal à $F = \langle X\rangle$ d'après la linéarité du produit scalaire.

Si y est orthogonal à tous les vecteurs de X, alors y est orthogonal à $\overline{X}$, l'adhérence de X $\big($d'après la la continuité de l'application $x \to \langle x, y\rangle\big)$.

L'ensemble $F_y = \{x \in H/\langle x, y\rangle = 0\}$ des vecteurs orthogonaux à un vecteur y donné est un sous-espace vectoriel fermé de H $\big($cést l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $x \mapsto \langle x, y\rangle\big)$.

Si E est sous-espace vectoriel de H, l'ensemble $E^{\perp} = \{x \in H/\langle x, y\rangle = 0,\ y \in E\}$ des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de E est un sous-espace vectoriel fermé de H, qu'on appelle l'orthogonal de E. On a $E \bigcap E^{\perp} = 0$. Remarquer que E et son adhérence $\overline{E}$ ont le même orthogonal $E^{\perp}$ $\big($découle de la continuité de l'application $x \mapsto \langle x, y\rangle\big)$.

Définition 9.2.6. *Soit F une partie non vide d'un espace de Hilbert. Soit $x \in H$, la projection orthogonale de x sur F, est le vecteur (s'il existe) $y \in F$ tel que le vecteur $x - y$ est orthogonal à F.*

Proposition 9.2.3. *(Rappels d'algèbre linéraire)*

1. *Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ des vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert H, on a $||\sum_1^n u_k|| = \sum_1^n ||u_k||$.*
2. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une suite orthonormée finie dans un espace de Hilbert H, et soit F le sous espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_n)$, alors le projeté orthogonal de $x \in H$ sur F est donné par $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$.*

9.2.2 Propriétés des espaces de Hilbert

Proposition 9.2.4. ***Inégalité de Bessel**. Soient H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n>0}$, une suite orthonormée dans H, pour tout $x \in H$ la série numérique $\sum_{n\geq 1} |\langle x, e_i\rangle|^2$ est convergente et de plus $\sum_{n\geq 1} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq ||x||^2$.*

Preuve

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2$, alors la suite $(S_n)_n$ est à termes positifs et est croissante donc, il reste à montrer qu'elle est majorée pour avoir la convergence.

Posons $v_n = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$, alors dáprès la proposition ci-dessus, vu que $(e_n)_{n>0}$, une suite orthonormée dans H, on a $v_n \perp (x - v_n)$. Comme, $x = v_n + (x - v_n)$, alors en elevant aur carré et en utilisant l'orthogonalité, on a : $||x||^2 = ||v_n||^2 + ||x - v_n||^2 \geq ||v_n||^2 = S_n = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$, car $||e_i|| = 1, \forall i > 0$ □

Proposition 9.2.5. *Soient H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n>0}$, une suite orthogonal dans H. la série de vecteurs $\sum_n u_n$ converge dans H si et seulement si $\sum_{n>0} ||u_n||^2 < \infty$, et dans ce cas $|| \sum_{n>0} u_n||^2 = \sum_{n>0} ||u_n||^2$.*

Si $(e_n)_{n>0}$, est une suite orthonormée dans H. la série de vecteurs $\sum_n \alpha_n e_n$ converge dans H si et seulement si $\sum_{n>0} ||\alpha_n||^2 < \infty$, et dans ce cas $|| \sum_{n>0} \alpha_n e_n||^2 = \sum_{n>0} ||\alpha_n||^2$.

Preuve Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ et $V_n = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$. Pour $m > n$, on a

$$||S_m - S_n||^2 = |V_m - V_n|$$

Ansi $(S_n)_n$ est de Cauchy dans H si et seulement si $(V_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

D'après la proposition ci-dessus, par orthogonalit, on a $||S_n||^2 = V_n, \forall n > 0$ et par continuité de la norme en passant à la limite on trouve, en cas de convergence (simultanée) l'égalité : $|| \sum_{i>0} u_i||^2 = \sum_{i>0} ||u_i||^2$.

Définition 9.2.7. *(Rappel)*

*Une partie A d'un espace vectoriel E est dite **convexe** si pour tout couple $(a; b)$ de points de A, le segment $[a, b] = \{(1 - \alpha)a + \alpha b, \alpha \in [0, 1]\}$ est inclus dans A.*

Proposition 9.2.6. *(Rappel) Si A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé (et donc d'un espace de Hilbert), il en est de même de pour $\overline{A}$ et $\overset{o}{A}$.*

Théorème 9.2.7. ***(Théorème de projection sur un convexe fermé)***. *Soient H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H.*

1. *Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul point $z \in C$ qui réalise la distance de x à C : $d(x, C) = \inf\{||x - y||, y \in C\} = ||x - z||$. Le point z est appelé projection de x sur C et on note $p_C(x) = z$, on prolonge p_C à C par $p_C(x) = x, \forall x \in C$.*
2. *p_C vérifie : $\forall y \in C,\ \mathrm{Re}\langle x - z, y - z\rangle = \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0$.*
3. *L'application p_C est contractante : $||p_C(x) - p_C(x')|| \leq ||x - x'||,\ \forall x, x' \in H$.*

Preuve

1. - Si $x \in C$, on pose $z = x$.

   -Supposons $x \notin C$. On a $\delta = d(x, C) = \inf\{||x - y||, y \in C\}$. On sait que (serie TD 1, 2014) que $d(x, C) = 0$ alors $x \in \overline{C} = C$ car C est fermé, alors $d(x, C) > 0$ car $x \notin C$.

   Posons $F_n = C \bigcap B_f(x, d + \frac{1}{n})$; alors pour tout $n \geq 1$, F_n est fermé dans H et la suite $(F_n)_n$ est décroissante. On a $\operatorname{diam}(F_n) = \inf\{||u - v|| \ / \ u, v \in F_n\}$, soient $u, v \in F_n$, alors, grâce ‘a lídentité du parallélogramme, on a

   $||u + v - 2x||^2 = 2||u - x||^2 + 2||v - x||^2 - ||u - v||^2$
   $\Rightarrow ||u - v||^2 = 2||u - x||^2 + 2||v - x||^2 - 4||\dfrac{u + v}{2} - x||^2$

   Comme C est convexe et la boule fermé est convexe, donc F_n est convexe, alors $\frac{u+v}{2} \in F_n$ ainsi $-||\dfrac{u+v}{2} - x||^2 \leq -d^2$. Or $||u - x||^2 \leq (d + \dfrac{1}{n})^2$ et $||v - x||^2 \leq (d + \dfrac{1}{n})^2$ par suite $||u - v||^2 \leq 4(d + \dfrac{1}{n})^2 - 4d^2 = 8\dfrac{d}{n} + \dfrac{4}{n^2}$, ainsi $\operatorname{diam}(F_n) \leq 2\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{n}} + \dfrac{2}{n}$.

   Comme H est un espce vectoriel normé complet, l'intersection des fermés non vide et emboitées F_n contient un et un seul point z, qui est le point cherché et ce point verifie $\delta = d(x, C) = ||x - z||$.

2.

3.

$\square$

Un cas particulier important est celui où $C = F$ est un sous-espace vectoriel fermé F de H. Dans ce cas on a $\langle x - z; y \rangle = 0$ pour tout vecteur $y \in F$, c'est à dire que $x - z \perp F$ et on dit que $z = p_F(x)$ est la projection orthogonal de x sur F.

Théorème 9.2.8. ***(Theoreme de représentation de F. Riesz)*** *Soit H un espace de Hilbert et L forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique vecteur $e \in H$ tel que $L(x) = \langle e, x \rangle$ pour tout $x \in H$, de plus $||L|| = ||e||$.*

Chapitre 10

Exercices corrigés

Exercice 10.0.1. *Soit (E, d) un espace métrique. Si G est une partie de E et x un élément de E.*

On pose $d(x, G) = \inf\{d(x, a)/a \in G\}$.

1. *Soit A une partie de E.*

   (a) *Montrer qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $d(x, A) = \lim_{n\to+\infty} d(x, a_n)$.*

   Solution

   D'après la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$., il existe une suite $(a_n)_n$ déléments de A telle que $d(x, A) \leq d(x, a_n) < d(x, A) + \frac{1}{n}$. et donc $d(x, A) = \lim_{n\to\infty} d(x, a_n)$.

   (b) *En déduire que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, $d(x, A) = 0$.*

   Solution

   Supposons que x soit dans $\overline{A}$. Il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x. Puisque pour tout n, $d(x, A) \leq d(x, a_n)$. Par passage à la limite, on obtient $d(x, A) = 0$.

   Réciproquement, si $d(x, A) = 0$, alors on déduit de (1a) qu'il existe une suite $(a_n)_n$ dans A telle que $0 = d(x, A) = \lim_{n\to\infty} d(x, a_n)$.

   Cela montre que $(a_n)_n$ converge vers x et donc $x \in \overline{A}$.

2. *Soit H une partie de E. On munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle d_u.*

   (a) *Montrer que l'application $f_H : (E, d) \to (\mathbb{R}, d_u) : x \mapsto d(x, H)$ est 1-lipschitzienne.*

Solution

Soient $x, y \in E$. $\forall a \in A$, on a $d(x,H) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$. En passant au inf, on a :

(α) $d(x,H) \leq d(x,y) + d(y,H)$.

En permutant x et y, on a

(β) $d(y,H) \leq d(y,x) + d(x,H)$.

En combinant (α) et (β), on a : $|d(x,H) - d(y,H)| \leq d(x,y)$. Donc f est 1-lipschitzienne.

(b) *Soient A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de E, disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.*

Solution

Posons $U = \{x \in E / d(x,A) < d(x,B)\}$ et $V = \{x \in E / d(x,A) > d(x,B)\}$. Alors $U \cap V = \emptyset$.

Soit $\phi_{A,B} : (E,d) \to (\mathbb{R}, d_u) : x \mapsto d(x,A) - d(x,B)$ est continue d'après (2a).

On a $U = \phi_{A,B}^{-1}(]0,+\infty[)$ et $V = \phi_{A,B}^{-1}(]-\infty,0[)$, donc U et V sont des ouverts.

Soit $x \in A$, alors

— $\underline{d(x,A) = 0}$

— et $\underline{d(x,B) > 0}$ car si $d(x,B) = 0$, alors $x \in \overline{B}$ d'après (1b), or B est fermé donc $x \in B$ ce qui impossible car A et B sont disjoints.

Ansi $x \in U$. Par suite $A \subset U$. Et de façon similaire, $B \subset V$

3. .

(a) *Dans (E,d), montrer que tout fermé F de E est intérsection dénombrable d'ouverts ;*

Solution

On muni R de sa distance usuelle d_u. On peut supposer que F est non vide. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{O}_n = \{x \in E / d(x,F) < \frac{1}{n}\}$. On vérifie que l'application $\varphi_F : (E, ||.||) \to (\mathbb{R}, d_u) : x \mapsto \varphi_F(x) = d(x,F)$ est continue d'après (2a). Comme $\mathbb{O}_n = \varphi_F^{-1}(]-\infty, \frac{1}{n}[)$. Alors, c'est un ouvert de E, donc, on a $\bigcap_{n\geq 1} \mathbb{O}_n = \{x \in E / \ d(x,F) = 0\} = \overline{F} = F$.

(b) Dans (E,d), montrer que tout ouvert U de E est union dénombrable de fermés.

Solution

On peut supposer que $U \neq E$. On pose $F = E \setminus U$ et $F_n = \{x \in E / \ d(x,F) \geq \frac{1}{n}\}$.

On voit bien que F_n est fermé et $\bigcup_{n\geq 1} F_n = \{x \in E / \ d(x,F) > 0\}$.

Exercice 10.0.2. *1. Ici $\mathbb{R}^n$ est muni de l'un de ses normes usuelles. Pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$. On veut montrer que $|| \ ||_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.*

(a) Si a et b sont des réels positifs ou nuls et si p et q sont des réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{p}$(utiliser le convexité de $x \mapsto \exp(x)$).

Solution

Si a ou b est nul, l'inéegalité est trivial. Supposons que $a, b > 0$. On a :
$ab = \exp(\ln a + \ln b) = \exp(\frac{1}{p} \ln a^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q} \ln b^{\frac{1}{q}}) \leq \frac{1}{p} \exp(\ln a^{\frac{1}{p}}) + \frac{1}{q} \exp(\ln b^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{p} a^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q} b^{\frac{1}{q}}$ (par convexité de $x \mapsto \exp(x)$).

(b) En déduire que : si $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels positifs ou nuls et si p et q sont des réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (Inégalité de Hölder).

Solution

Comme $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[\frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right] \left[\frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right] \leq 1$.

Posons $\alpha_i = \left[\frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right]$ et $\beta_i = \left[\frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right]$.

Alors d'après (a), on a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(c) En déduire que : si $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des réels positifs ou nuls et si $p > 1$ alors $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (Inégalité de Minkowski).

Solution

Si $p = 1$, l'inégalité de Minkowski est évidente. Supposons donc $p > 1$ et notons $c_i = a_i + b_i$, alors on a $\sum_{i=1}^n c_i^p = \sum_{i=1}^n a_i c_i^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i c_i^{p-1}$ et pour les termes du membres de droite, en appliquant l'inágalité de Holder ci-dessus avec $q = \frac{p}{p-1}$, on a $\sum_{i=1}^n c_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{i=1}^n c_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{i=1}^n c_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$. En divisant les deux memebres de cette inégalité par $\left(\sum_{i=1}^n c_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$ et en utilisant le fait que $1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p}$, on obtient le résultat.

(d) *En déduire que* $|| \ ||_p$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$. (A faire : découle de l'inégalité de Minkowski pour l'inégalité triangulaire).

2. *Soit* $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, *l'espace des fonctions réelles de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$. *Pour* $f \in E$, *on pose* $N(f) = \left(|f(0)|^2 + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. *Montrer que* N *est une norme sur* E, *qui dérive d'un produit escalaire.*

   Solution

   On définit le produit scalaire $\langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\ dt$ et on en déduit une norme.

Exercice 10.0.3. *Soit* E *un espace vectoriel normé.*

1. *Montrer que si* A *est une partie de* E *et* θ *un ouvert de* E, *alors l'ensemble* $A+\theta = \{a+b/a \in A,\ b \in \theta\}$ *est un ouvert.*

   Solution

   $A+\theta = \{a+b/a \in A,\ b \in \theta\} = \bigcup_{a\in A} a+\theta$. Soit $f_a : E \to E : x \mapsto x-a$, alors f_a est continue relativement à cette norme. De plus $f_a^{-1}(\theta) = \theta + a$. Donc, $A+\theta = \bigcup_{a\in A} f_a^{-1}(\theta)$ est réunion d'ouverts.

2. Soit F un sous-espace vectoriel propre de E.

   (a) *Montrer que* $F^o = \emptyset$

   Solution

   Supposons $F^o \neq \emptyset$ et soit $a \in F^o$. Il existe $r > 0$ tel que $B_o(a,r) \subset F$. Pour tout $x \in E^*$, on a $a + \frac{r}{2}\frac{x}{||x||} \subset B_o(a,r) \subset F$. Comme F contient a et est un sous espace vectoriel, $x \in F$ donc $F = E$, ce qui est absurde.

   (b) *Montrer que si* $\overline{F}$. *est un sous-espace vectoriel de* E.

   Solution

   Soient x et y dans $\overline{F}$ et soient α, β deux scalaires. Il existe alors deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de F qui convergent respectivement vers x et y. La suite $(\alpha x_n + \beta y_n)_n$

converge vers $(\alpha x_n + \beta y_n)_n$, ce dernier est donc dans $\overline{F}$ car étant fermé. Ansi $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel.

(c) *Montrer que si F est un hyperplan alors F est fermé ou bien F est dense dans E.*

Solution

Supposons $F \neq \overline{F}$, il existe $a \in \overline{F} \backslash F$. Comme F est un hyperplan, on a $E = \mathbb{K}a \oplus F$. Puisque $\mathbb{K}a$ et F sont inclus dans $\overline{F}$ qui, d'après la question 2, est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $\mathbb{K}a \oplus F \subset \overline{F}$ et donc $\overline{F} = E$.

Exercice 10.0.4. *On munit $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$*

1. *Montrer que l'ensemble L_k des fonctions k-lipschitzienne est un fermé de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.*

   Solution

   Soit $(f_n)_n$ une suite L_k qui converge dans $C([0,1], \mathbb{R})$ vers f. Montrons que $f \in L_k$. Pour tout x, y dans $[0,1]$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément, donc simplement vers f. On fait tendre n vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, on en déduit que f est k-lipschitzienne.

2. *La fonction $f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_o(x) = \sqrt{x}$ est - elle lipschitzienne ?*

   Solution

   Supposons que f_0 est k-lipschitzienne, cela veut dire que, pour tout x et y dans $[0,1]$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$. En particulier, pour $y = 0$ on obtient, $1 \leq k\sqrt{x}, \forall x \in [0,1]$. Ce qui est impossible car le second membre tend vers 0 quand x tends vers 0.

Exercice 10.0.5. *Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$.*

1. *Montrer que si f est continue, alors son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$. La réciproque est - elle vraie ?*

   Solution

   Soit $(x_n, f(x_n))$ une suite de Γ_f qui converge vers (x, y). La suite (x_n) converge vers x et la suite $(f(x_n))_n$ converge vers y. Puisque f est continue, on a nécessairement $y = f(x)$ si bien que la limite (x, y) est dans Γ_f. Ainsi, Γ_f est fermé dans $E \times F$.

   La réciproque est fausse. En effet, il suffit de considérer le cas $E = F = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application definie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f n'est pas continue et son graphe $\Gamma_f = \{(0,0)\} \cup \{(x, 1/x)/x \neq 0\}$ est fermé comme réunion de deux fermés de $\mathbb{R}$.

2. *Montrer que si f est continue, son graphe Γ_f est homéomorphe à E.*

   Solution

   Comme f est continue, la fonction $g : E \to \Gamma_f \subset E \times F : x \mapsto (x, f(x))$ est continue et bijective de E sur Γ_f. Sa reciproque $g^{-1} : (x, f(x)) \mapsto x$ est continue. Ainsi, g est un homéomorphisme de E sur Γ_f.

Exercice 10.0.6. *Soient (E, d) un espace métrique et K un sous-espace métrique compact.*

1. *Montrer que $\forall B \subset X, B \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in K$ tel que $d(K, B) = d(x_0, B)$.*
2. *Soit G une partie fermé de (E, d) tel que $K \cap G = \emptyset$. Montrer que $d(K, G) > 0$.*

Preuve

1. Comme dans le premier exercice du chapitre 1, par définition de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de K telle que $d(K, B) \leq d(x_n, B) < d(K, B) + \frac{1}{n}$. et donc $d(K, B) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, B)$. Comme K est compact dans un espace métrique, $(x_n)_n$ admet une suite extraite $(x_{\phi(n)})_n$ convergente vers un certain x dans K. Alors par continuité on a $d(K, B) = d(x, B)$.
2. Supposons G fermé et $K \cap G = \emptyset$. D'aprés la question précédente, il existe $x \in K$ tel que $d(K, G) = d(x, G)$. Si $d(x, G) = 0$, alors $x \in \overline{G} = G$ ce qui absurde car $K \cap G = \emptyset$.

$\square$

Exercice 10.0.7. ***(Application ouverte, fermée)*** *Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques.*

1. *Montrer que f est ouverte si et seulement si , pour toute partie $P \subset X$: $f(\overset{o}{P}) \subset \overset{o}{\widehat{f(P)}}$.*
2. *Montrer que f est fermée si et seulement si , pour toute partie $P \subset X$: $\overline{f(P)} \subset f(\overline{P})$:*

Solution

1. $\Rightarrow$) Supposons que f est ouverte. Soit $y \in f(\overset{\circ}{P})$, alors existe $x \in \overset{\circ}{P}$ telque $y = f(x)$. On a alors
$y = f(x) \in f(\overset{\circ}{P}) \subset f(P)$, or $f(\overset{\circ}{P})$ est un ouvert car f est ouverte, donc $y \in \overset{o}{\widehat{f(P)}}$.
$\Leftarrow$) Supposons que $\forall P \subset X$: $f(\overset{o}{P}) \subset \overset{o}{\widehat{f(P)}}$. Soit $\mathcal{O}$ un ouverte de X, alors $f(\mathcal{O}) = f(\overset{o}{\mathcal{O}}) \subset \overset{o}{\widehat{f(\mathcal{O})}}$, donc $f(\overset{o}{\mathcal{O}}) = \overset{o}{\widehat{f(\mathcal{O})}}$
ainsi $f(\mathcal{O})$ est un ouvert.
2. $\Rightarrow$) Supposons f fermée. Alors $f(\overline{P})$ est fermé et contient $f(P)$, donc il contient $\overline{f(P)}$ car ce dernier est le plus petit fermé contenant $f(P)$.
$\Leftarrow$) On suppose que $\forall P \subset X$: $\overline{f(P)} \subset f(\overline{P})$. Soit F, un fermé de Y, alors on a $\overline{f(F)} \subset f(\overline{F}) = f(F)$, donc $f(\overline{F}) = f(F)$ c'est-à-dire f est fermée.

$\square$

Exercice 10.0.8. ***(Homéomorphe et Projection stéréographique)*** *Montrer que l'espace métrique* $\mathcal{S}^1 = \{(x,y)/x^2 + y^2 = 1\}$ *avec la métrique induite par l'inclusion dans* $(\mathbb{R}^2, T_u)$ *n'est homéomorphe à aucun interval (segment) de* $\mathbb{R}$ *(utiliser une projection stéréographique).*

Solution :

On pose $S = (0,1)$ *appellé le pole sud. Vérifier que l'application* $f = (\mathcal{S}^1 \setminus \{S\}) \to \mathbb{R}$ *avec* $f(x,y) = \frac{x}{1-y}$ *et* $f^{-1}(r) = (\frac{2r}{1+r^2}, 1 - \frac{2}{1+r^2})$, *est homéomorphisme. Pour la suite, supposons que* $g : \mathcal{S}^1 \to I$ *soit un homéomorphisme entre* $\mathcal{S}^1$ *et un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *On peut supposer que* $g(S)$ *n'est pas sur le bord de l'intervalle (quitte à composer au départ* g *avec une rotation), donc* $I \setminus \{g(S)\}$ *est une réunion de 2 intervals disjoints. Soit* $h = g/(\mathcal{S}^1 \setminus \{S\})$ *c-a-d la restriction de* g *à* $\mathcal{S}^1 \setminus \{S\}$, *alors* h *est un homéomorphisme donc* $h \circ f^{-1}$ *est un homéomorphisme de* $\mathbb{R}$ *sur* $I \setminus g(S) \subset \mathbb{R}$. *Ce qui est absurde car l'image de* $\mathbb{R}$ *par une application continue doit être un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Exercice 10.0.9. ***(Espace topologique limite projective)*** *On considère les surjections canoniques* $\pi_{m,n} : \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z} : x_n \mod 2^n \mapsto x_n \mod 2^m$. *Montrer que l'espace topologique limite projective* $\mathbb{Z}_2 = \varprojlim \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} = \{z = (z_n)_n \in \prod_n \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \;/\; \pi_{m,n}(z_n) = z_m,\ m \leq n\}$, *muni d'applications continues surjectives* $\pi_n : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, *est homéomorphe à l'ensemble de Cantor* K_3 $\big\langle$ *On pourra montrer qu'il est en faite homéomorphe à* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *où* $\{0,1\}$ *muni de la* *topologie discrète, à travers l'application* $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}_2 = \varprojlim \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} : u = (u_n)_n \mapsto (v_n)_n$ *où* $v_1 = u_1$ *et* $v_n = \sum_{1\le i\le n} u_i 2^{i-1} \mod 2^n$ *pour* $n \geq 2\rangle$.

Solution Il suffit de remarquer que

- (*) $v_1 = u_1 < 2$, $v_2 = u_1 + 2u_2 < 2^2$, $v_3 = u_1 + 2u_2 + 2^2u_3 < 2^3$, ..., $v_n = u_1 + 2u_2 + 2^2u_3 + \ldots + 2^{n-1}u_n < 2^n$,

- (**) $\pi_{m,n}(v_n) = (\sum_{1\le i\le n} u_i 2^{i-1} \mod 2^n) \mod 2^m = (\sum_{1\le i\le m} u_i 2^{i-1}) \mod 2^m = (\sum_{1\le i\le m} u_i 2^{i-1}) \mod 2^m = v_m$ donc $\varphi((u_n)_n)) = (v_n)_n \in \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et φ est continue

- (***) et inversement $u_1 = v_1 < 2$, $u_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{2} < 2$, $u_3 = \dfrac{v_3 - v_2}{2^2} < 2$, ..., $u_n = \dfrac{v_n - v_{n-1}}{2^n} < 2$, donc φ^{-1} existe et est continue.

□

Exercice 10.0.10. ***(Espace quotient : fabriquer une sphère avec un carré)*** *On considère la sphère* $\mathcal{S}^2 = \{(u,v,w)/u^2+v^2+w^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ *et le quotient* $\big([0,1]\times[0,1]/\big)\mathcal{R}_6$ *où on a les identifications* $(0,t)\mathcal{R}_6(1,t)$, $(s,0)\mathcal{R}_6(s',0)$ *et* $(s,1)\mathcal{R}_3(s',1)$ *pour tout* $t, s, s' \in [0,1]$, *sachant que les cas non précisés sont des singletons. Montrer que l'application* $h : [0,1]\times[0,1] \to \mathcal{S}^2$ *:* $h(\alpha,\beta) = \big(\cos 2\pi\alpha.\sin\pi\beta, \sin 2\pi\alpha.\sin\pi\beta, \cos\pi\beta\big)$
induit un homéomorphisme $\big([0,1]\times[0,1]\big)/\mathcal{R}_6 \simeq \mathcal{S}^2$

Solution

(*) Les applications $\alpha \mapsto \cos 2\pi\alpha$ et $\beta \mapsto \sin\pi\beta$ sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application $(u,v) \mapsto uv$ est continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est un corps topologique, ainsi, l'application $(\alpha,\beta) \mapsto \cos 2\pi\alpha \sin\pi\beta$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. De même, les applications $(\alpha,\beta) \mapsto \sin 2\pi\alpha \sin\pi\beta$ et $\beta \mapsto \cos\pi\beta$ sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement. Ainsi, l'application $(\alpha,\beta) \mapsto \big(\cos 2\pi\alpha.\sin\pi\beta, \sin 2\pi\alpha.\sin\pi\beta, \cos\pi\beta\big)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est continue. Par suite, sa restriction h de $[0,1]\times[0,1]$ à $\mathcal{S}^2$ est continue et surjective.

(**) On vérifie que $h(\alpha,\beta) = h(\alpha',\beta') \Leftrightarrow (\alpha,\beta)\mathcal{R}_6(\alpha',\beta')$. Par suite $\overline{h} : \big([0,1]\times[0,1]\big)/\mathcal{R}_6 \to \mathcal{S}^2$ est bijective.

(***) Comme h est continue alors $\overline{h}$ est continue.

(****) Si F est un fermé du compact $[0,1]\times[0,1]$, alors $h(F)$ est un compact et donc, est fermé dans le compact $\mathcal{S}^2$. Donc h est fermé, par suite $\overline{h}$ est fermé.

(*****) On conclut que $\overline{h}$ est un homéomorphisme.

$\square$

Exercice 10.0.11. *Si G est un groupe topologique noté multiplicativement, on note $L_g : G \to G : x \mapsto g.x$.*

1. *Montrer que si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, avec G' un groupe topologique noté multiplicativement, alors, pour tout $g \in G$, $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$. En déduire que f est un morphisme de groupes topologiques si et seulement si f est continue en l'élément neutre e.*
2. *Montrer que l'application $h : G \times G \to G : (x,y) \mapsto xy^{-1}$ est continue, en déduire que l'adhérence d'un sous-groupe d'un groupe topologique est encore un sous-groupe topologique.*
3. *Montrer que $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})/\mathrm{Det}(A) \neq 0\}$ est un groupe topologique et qu'il est connexe par arcs, et enfin montrer que $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Det}(A) \neq 0\}$ est un groupe topologique et qu'il est n'est pas connexe.*

Preuve

1. Soit G un groupe topologique, d'élement neutre e. Definissons la translation à gauche $L_g : G \to G : x \mapsto gx$. Cette applications est un homéomorphisme, car continue et bijective et son inverse $L_g^{-1} : G \to G : x \mapsto g^{-1}x$ est aussi continue.

   $\Rightarrow$) Soit $f : G \to G'$, un homomorphisme de groupe continue en e, élément neutre de G. On a $f \circ L_g(x) = f(gx) = f(g)f(x) = L_{f(g)} \circ f(x)$.

   Soit $x \in G$ et $V(f(x))$ un voisinage ouvert de $f(x)$ dans G', en prenant $g = x$, on a $L_x^{-1} \circ f^{-1}\big(V(f(x))\big) = f^{-1} \circ L_{f(x)}^{-1}\big(V(f(x))\big)$. Comme $L_{f(x)}^{-1}$ est un homéomorphisme de G' dans G', alors, $L_{f(x)}^{-1}\big(V(f(x))\big)$ est un ouvert de G'. Vérifions que $f(e) \in L_{f(x)}^{-1}\big(V(f(x))\big)$, on a $L_{f(x)}^{-1}\big(V(f(x))\big) = [f(x)]^{-1}\big(V(f(x)\big)$, donc $f(e) = f(x^{-1}x) = f(x^{-1})f(x) = [f(x)]^{-1}f(x) \in L_{f(x)}^{-1}\big(V(f(x))\big)$, d'où, $L_{f(x)}^{-1}\big(V(f(x))\big)$ est un ouvert de G' contenant $f(e)$, ainsi $f^{-1} \circ L_{f(x)}^{-1}\big(V(f(x))\big)$ est un ouvert de G car f est continue en e. Donc $L_x^{-1} \circ f^{-1}\big(V(f(x))\big)$ est un ouvert de G et comme L_x^{-1} est un homéomorphisme de G dans G, alors $f^{-1}\big(V(f(x)\big)$ est un ouvert G contenant x.

$\Leftarrow$) Trivial.

2. Comme G est un groupe topologique, alors les applications $G\times G \to G : (x,y) \mapsto xy$ et $G \to G : x \mapsto x^{-1}$ sont continues donc l'application $h : G \times G \to G : (x,y) \mapsto x^{-1}y = h(x,y)$ est continue. Soit H un sous-groupe de G. $\overline{H}$, l'adhérence de H. Soit $x, y \in \overline{H}$, et $V(xy^{-1}) = V(h(x,y))$ un voisinage ouvert de xy^{-1}, comme h est continue, alors $h^{-1}\big(V(h(x,y))\big)$ est un ouvert de $G\times G$, donc, par définition de la topologie produit, il existe deux voisinages ouverts $V(x)$ et $V(y)$ tels que $V(x) \times V(y) = h^{-1}\big(V(h(x,y))\big)$. Comme $x, y \in \overline{H}$, il existe $a \in V(x) \bigcap H$ et $b \in V(y) \bigcap H$, alors $ab^{-1} \in H$ et $h(a,b) = ab^{-1} \in V(xy^{-1}) = V(h(x,y))$, par suite $ab^{-1} \in H \bigcap V(xy^{-1})$. Ansi $xy^{-1} \in \overline{H}$.

$\square$

Exercice 10.0.12. ***(Compacité et Procédé diagonal de Cantor)***

1. Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques. Monter que si $f : E \to F$, est continue et E est compact, alors f est uniformément continue. Application : Soit (E,d) un espace metrique et $f : [a,b] \times E \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'application G definie pour $x \in E$ par : $G(x) = \int_a^b f(t,x)dt$, est continue sur E.

2. (a) Soit (E,d) un espace métrique. On pose $\delta' = \min(1,d)$. Montrer que δ' est un distance sur E et que ces deux distances sont topologiquement équivalentes :i.e $T_d = T_\delta$.

(b) Soient (E_n, d_n) une famille d'espaces métriques. On pose $\delta(x,y) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\delta_n(x_n,y_n)}{2^n}$ où $\delta_n = \min(1,d_n)$ avec $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$. Montrer que δ est un distance sur $E = \prod_{n\geq 1} E_n$ et que la distance δ induit une topologie T_δ équivalente à la topologie produit T_π sur E. Chercher d'autres distances sur E topologiquement équivalente à δ.

(c) Montrer que si $\big(K_i, d_i\big)_{i\geq 1}$ est une famille dénombrables d'espaces métriques compacts, alors $K = \prod_{i\geq 1} K_i$ est compact, muni de l'un des distances topologiquement équivalentes de la question ci-dessus $\big($s'inspirer du Procédé Diagonal de Cantor utilisé dans la complétion métrique$\big)$.

Solution

1. (a) Montrons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in E,\ d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.

   Supposons le contraire : c'est-à-dire il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall \eta > 0$, il existe x_η et y_η dans E verifiant $d(x,y) < \eta$ et $\delta\big(f(x), f(y)\big) \geq \varepsilon$. Pour $\eta = \frac{1}{n}$, il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ telles que $d(x_n, y_n) < \eta$ et $\delta\big(f(x_n), f(x_n)\big) \geq \varepsilon$. Comme E est compcat, la suite $(x_n)_n$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un element x de E. Mais

   $d(y_{\varphi(n)}, x) \leq d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x)$ et $d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} < \frac{1}{\varphi(n)}$ par constrution.

   Donc $\lim_{n\to+\infty} d(y_{\varphi(n)}, x) = 0$. Ansi $(y_{\varphi(n)})_n$ converge vers x. Puisque f est continue,

   $\lim_{n\to+\infty} f(y_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x) \Rightarrow \delta\big(f(x_{\varphi(n)}), f(x_{\varphi(n)})\big) \to_{n\to+\infty} 0$. Absurde.

   (b) Application : Soit $l \in E$. Montrons que G est continue en l. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers l. On pose $K = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{l\}$. L'ensemble $[a,b] \times K$ étant compact, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur cet ensemble muni de la distance δ, donnée par exemple par $\delta : \big([a,b] \times K\big)^2 \to$: $\delta\big((t,x),(t',x')\big) = \max\{d_u(t,t'), d(x,x')\}$ où d_u est la distance usuelle sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout (t,u) et (s,v) dans $[a,b] \times K$:

   $\delta\big((t,u),(s,v)\big) < \eta \Rightarrow \big|f(t,u), f(s,v)\big| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

   Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n > n_0, \delta\big((t,x_n),(t,l)\big) = \max\{d_u(t,t), d(x_n,l)\} = d(x_n, l) < \eta$.

   et par suite, pour tout $n > n_0$,

   $$|G(x_n) - G(l)| \leq \int_a^b |f(t,x_n) - f(t,l)|dt < \varepsilon$$

2. Vérifions que δ' est une distance.

   - on a $\delta'(x,y) \geq 0$ car $d(x,y) \geq 0$ et $\delta'(x,y) = \delta' y, x)$ car $d(x,y) = dy, x)$.
   - $\delta'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, d(x,y)\} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
   - on sait que $\delta'(x,y) \leq 1,\ \forall x, y \in E$. Soit $z \in E$,

(*) si $\delta'(x,z)=1$ ou $\delta'(y,z)=1$ alors $\delta'(x,y)\leq 1\leq \delta'(x,z)+\delta'(z,y)$;

(**) si $\delta'(x,z)<1$ et $\delta'(y,z)<1$, alors $\delta'(x,z)=d(x,z)$ et $\delta'(z,y)=d(z,y)$ et donc $\delta'(x,y)\leq d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)\leq \delta'(x,z)+\delta'z,y)$.

Montrons que δ' est topologiquement équivalente à d.

- Soit $y\in B_o^d\big(x,r\big)$, on a $\delta'(x,y)\leq \min\{1,d(x,y)\}\leq d(x,y)\leq r$, donc $y\in B_o^{\delta'}\big(x,r\big)$. par suite $B_o^d\big(x,r\big)\subset B_o^{\delta'}\big(x,r\big)$

- Soit $s=\min(1,r)$. Si $y\in B_o^{\delta'}\big(x,s\big)$ alors $\delta'(x,y)\leq s\leq 1$ donc $\delta'(x,y)=d(x,y)$, ainsi $d(x,y)\leq s\leq r$, d'où, $y\in B_o^d\big(x,r\big)$. Par suite $B_o^{\delta'}\big(x,s\big)\subset B_o^d\big(x,r\big)$.

3. Vérifions que δ est une distance sur $E=\prod_{i\geq 1}E_i$.

   - Remarquons d'abord que la série $\delta=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\delta_n}{2^n}$ où $\delta_n=\min(1,d_n)$, converge et $\delta=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\delta_n}{2^n}\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}\leq 1$.

   - $\delta(x,y)\geq 0$ car $\delta_n(x_n,y_n)\geq 0$ et $\delta(x,y)=\delta(y,x)$ car $\delta_n(x_n,y_n)=\delta_n(y_n,x_n)$.

   - $\delta(x,y)=0\Leftrightarrow \delta_n(x_n,y_n)=0,\ \forall n\Leftrightarrow x_n=y_n\ \forall n\Leftrightarrow x=y$

   - $\delta(x,y)\leq\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\delta_n(x_n,z_n)+\delta_n(x_n,z_n)}{2^n}\leq\delta(x,z)+\delta(z,y)$.

   Montrons que la topologie T_δ est la topologie produit.

   (*) Soit $B_o^\delta(x,r)$, un voisinage élementaire ouvert de $x=(x_n)_{n\geq 1}$ pour T_δ. Fabriquons un voisinage ouvert V de x pour T_π contenu dans $B_o^\delta(x,r)$. Posons $V=\prod_{n=1}^{p-1}B_o^{\delta_n}(x_n,r_n)\times\prod_{n\geq p}$ qui un voisinage ouvert de x pour T_π, on veut choisir p et les $r_n,\ \leq p-1$ de sorte que $V\subset B_o^\delta(x,r)$. Soit $y\in V\Rightarrow \delta(x,y)\leq\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\delta_n(x_n,y_n)}{2^n}\leq\sum_{n=1}^{p-1}\frac{r_n}{2^n}+\sum_{n\geq p}\frac{1}{2^n}\leq(1-\frac{1}{2^p})\max(r_n,n\leq p-1)+\frac{1}{2^{p-1}}$
   $\leq\max(r_n,n\leq p-1)+\dfrac{1}{2^{p-1}}$. Ansi en choissiant p et r_n tel que $r_n=\frac{r}{2}$ et $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leq\dfrac{r}{2}$, on a le résulat désiré.

   (**) Réciproquement, Soit $V=\prod_{i\geq 1}V_i$ un voisinage ouvert élementaire de x pour T_π alors par définition de la topologie produit il existe k et $n_j,1\leq j\leq k$ tels que $V_i=B_o^{\delta_i}(x_i,r_i)$ pour $i\in\{n_j,1\leq j\leq k\}$ et $V_i=E_i$ si $i\notin\{n_j,1\leq j\leq k\}$. Choisissons r de sorte que la boule ouverte $B_o^\delta(x,r)$ soit contenu dans V. Soit $y \in B_o^\delta(x,r)$ alors $\delta(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{\delta_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq r$ donc $\frac{\delta_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq \min(\frac{1}{2^n}, r), \forall n \Rightarrow \delta_n(x_n,y_n) \leq 2^n \min(\frac{1}{2^n}, r) = (1, 2^n r), \forall n$.

Si $i \notin \{n_j, 1 \leq j \leq k\}$ alors $y_i \in V_i = E_i$.

Si $i \in \{n_j, 1 \leq j \leq k\}$, alors $\delta_i(x_i,y_i) \leq \min(1, 2^i r) \leq \min(1, 2^m r)$
où $m = \max\big\{i/i \in \{n_j, 1 \leq j \leq k\}\big\}$, mais alors $\delta_i(x_i,y_i) \leq r_i$ ($\Leftrightarrow y_i \in V_i$) dès que $2^m r \leq r_i, \forall i \in \{n_j, 1 \leq j \leq k\}$. Anisi en choisissant $r = \frac{1}{2^m} \min\{r_i, i \in \{n_j, 1 \leq j \leq k\}\}$ avec $m = \max\big\{i \in \{n_j, 1 \leq j \leq k\}\big\}$, on trouve le résultat désiré.

4. Le procéedé diagonal de Cantor intervient dans beaucoup de situation enanalyse. Soit $(X_n)_n$ est une suite dans $\prod_{i\geq 1} E_i$, montrons on peut extraire de $(X_n)_n$ une sous-suite qui converge.

   Considérons le "vecteur" $X_n = (X_n^{(i)})_{i\geq 1} \in \prod_{i\geq 1} E_i$ puis la suite $(X_n^{(i)})_n$ dans (E_i, d_i).

   - On commence par E_1 qui est compact donc on peut extraire de $(X_n^{(1)})_n$, une suite $(X_{1,n}^{(1)})_n$ qui converge vers un certain l_1. On considère alors la suite $(X_{1,n})_n$ extraite $(X_n)_n$ dont la première composante est $(X_{1,n}^{(1)})_n$.

   - On passe à E_2 qui est compact, alors on peut extraire de $(X_{1,n}^{(2)})_n$, une suite $(X_{2,n}^{(2)})_n$ qui converge vers un certain $l_2 \in E_2$. On considère alors la suite $(X_{2,n})_n$ extraite $(X_{1,n})_n$ dont les composantes 1 et 2 sont $(X_{2,n}^{(1)})_n$ et $(X_{2,n}^{(2)})_n$ et convergent vers l_1 et l_2 respectivement (noter qu'une suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite).

   - Ansi de suite, par récurrence sur j, on fabrique une suite $(X_{j,n})_n$ extraite de $(X_{j-1,n})_n$ dont les composantes $1, 2, \ldots$ et j sont $(X_{j,n}^{(i)})_n, 1 \leq i \leq j$, et elles convergent vers $l_i \in E_i$ respectivement.

   - Par suite, on considère la suite $(X_{n,n})_n$ extraite de $(X_n)_n$ dont chaque composante $(X_{n,n}^{(i)})_n$ converge vers $l_i \in E_i$. Posons $l = (l_i)_i$. Montrons que $(X_{n,n})_n$ converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$,

   On a $\delta\big((X_{n,n})_n; l\big) = \displaystyle\sum_{i\geq 1} \frac{\delta_i\big(X_{n,n}^{(i)}; l_i\big)}{2^i}$ où $\delta_i = \min(1, d_i)$, donc, on peut écrire

   $\delta\big((X_{n,n})_n; l\big) \leq \displaystyle\sum_{\leq 1 \leq i \leq M} \frac{\delta_i\big(X_{n,n}^{(i)}; l_i\big)}{2^i} + \sum_{i \geq M+1} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{\leq 1 \leq i \leq M} \frac{\delta_i\big(X_{n,n}^{(i)}; l_i\big)}{2^i} + \frac{1}{2^M}$. Comme dans les questions précédentes, on choisit M tel que $\frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}$ et n tel que $\delta_i\big(X_{n,n}^{(i)}; l_i\big) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\square$

Exercice 10.0.13. *Soit $n \in \mathbb{N}, n > 1$, on considère le groupe multiplicatif $\{\pm 1\}$ qui opère sur la sphère*

$\mathcal{S}^n = \{(x_i)_{0\leq i\leq n}/\Sigma_{i=0}^n x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *On note par $\mathbb{P}^n$, l'espace projectif de dimension n.*

1. *Montrer que $\pi : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n/\{\pm 1\} : x \mapsto \overline{x}$ est fermé.*
2. *Montrer que $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ est séparé.*
3. *Montrer que $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ est compact et connexe.*
4. *Montrer qu'on a un homéomorphisme $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{P}^n$.*

Preuve

1. Montrons que $\pi : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n/\{\pm 1\} : x \mapsto \overline{x}$ est fermé. Si F est un fermé de $\mathcal{S}^n$ alors $-F$ est un fermé car l'application $op : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n : x \mapsto -x$ est un homéomorphisme. Ansi $\pi^{-1}(\pi(F)) = F\bigcup(-F)$ est un fermé dans $\mathcal{S}^n$ et donc $\pi(F)$ est fermé par définition de la topologie quotient $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$.

2. Notons $||,||$ la norme sur $\mathbb{R}^n$, d la distance induite par cette norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\overline{x} \in \mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ alors $\overline{x} = \{x, -x\}$. Comme $||x|| = ||-x||$, alors, on peut définir une distance sur $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ en posant
$\widehat{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d(\{x, -x\}, \{y, -y\}) = \inf\big\{d(u, v) = ||u - v||/u \in \{x, -x\}, v \in \{y, -y\}\big\}$.
En effet, noter qu'il existe $x_0 \in \overline{x} = \{x, -x\}$ tel que $\widehat{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d(\{x, -x\}, \{y, -y\}) = d(x_0, \overline{y})$ car $\overline{x} = \{x, -x\}$ est compacte dans $\mathcal{S}^n$, et donc
$\widehat{d}(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Rightarrow d(x_0, \overline{y}) = 0 \Rightarrow x_0 \in \overline{y}$ car $\overline{y}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$. Par suite $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$. Les autres propriétés sont simples à vérifier, ainsi $\Big(\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}, \widehat{d}\,\Big)$ est un espace métrique donc est séparé pour la toplogie métrique $T_{\widehat{d}}$. On note T_π la topologie quotient sur $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$.

   Soient $a \in \mathcal{S}^n$ et $B_0(\overline{a}, r)$ une boule ouverte de centre $\pi(a) = \overline{a}$ et de rayon $r > 0$.
   On a $B_0(\overline{a}, r) = \big\{\overline{z}/\widehat{d}(\overline{a}, \overline{z}) < r\big\} = \big\{\overline{z}/d(\overline{a}, \overline{z}) < r\big\}$. Comme $d(a, z) < r \Rightarrow \widehat{d}(\overline{a}, \overline{z}) = d(\overline{a}, \overline{z}) < r$, alors $\pi\left(B_0(a, r)\right) \subset B_0(\overline{a}, r)$. Anisi π est continue pour $T_{\widehat{d}}$ et donc $T_{\widehat{d}} \subset T_\pi$ par définition de la topologie quotient (= c'est la plus fine des topologies rendant continue π). Par suite $(\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}, T_\pi\ )$ est séparé pour la toplogie quotient T_π

3. Découle du fait que l'image d'un compact (resp : un connexe) par une application continue est un compact (resp : un connexe) $\pi(\mathcal{S}^n) = \mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$

4. L'inclusion de $\mathcal{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est continue, et induit par passage aux quotients une bijection continue f de $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ sur $\mathbb{P}^n$. Son inverse, qui est l'application induite par passage aux quotients de l'application continue de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathcal{S}^n$ définie par $x \mapsto \dfrac{x}{||x||}$, est encore continue. Donc f est un homéomorphisme (et on identifie souvent $\mathcal{S}^n/\{\pm 1\}$ et $\mathbb{P}^n$ par cette application).

□

Exercice 10.0.14. *1. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On pose $\Lambda = \{(x, y) \in I \times I/x < y\}$. Montrer que Λ est connexe par arcs.*

2. Soit I un intervalle ouvert non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. On pose $\Gamma = \left\{ \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} / x, y \in I, x \neq y \right\}$

(a) Montrer Γ est connexe et $\Gamma \subset f'(I) \subset \overline{\Gamma}$=l'adhérence de Γ.

(b) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Preuve

1. Soient $A = (x, y), B = (x', y') \in \Lambda = \{(x, y) \in I \times I/x < y\} \subset \mathbb{R}^2$.
   Soit $\gamma : [0, 1] \to \Lambda : t \mapsto tA + (1 - t)B = C = \big(tx + (1 - t)x'; ty + (1 - t)y'\big)$, alors $\gamma(t) \in \Lambda$ car $tx + (1-t)x' < ty + (1-t)y'$ et γ est continue avec $\gamma(0) = B$ et $\gamma(1) = A$.

2. Comme $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ alors
   $\Gamma = \left\{ \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} / x, y \in I, x \neq y \right\} = \left\{ \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} / x < y \in I \right\}$
   On définit donc $\Psi : \Lambda \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ qui est continue comme quotient des deux fonctions $(x, y) \mapsto x - y$ et $(x, y) \mapsto f(x) - f(y)$ qui sont continues. Comme Λ est connexe par arcs et Ψ est continue alors $\Gamma = \Psi(\Lambda)$ est connexe par arcs.

   (a) Soit $z = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \in \Gamma$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe, $a \in I$ tel que $f'(a) = z$ et donc $z \in \Gamma$ par suite $\Gamma \subset f'(I)$.
   Soit $f'(x_0) \in f'(I)$ alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ donc $f'(x_0) \in \overline{\Gamma}$ alors $f'(I) \subset \overline{\Gamma}$.

(b) Γ et $\overline{\Gamma}$ sont connexes par arcs dans $\mathbb{R}$, ce sont donc des intervalles et $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ contient au plus 2 points qui seraient des extrémités de Γ, s'ils existent . Par suite $f'(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

□

Exercice 10.0.15. *Exemple d'espace de Hilbert.*

Soit $l^2 = \{(x_n)_{n>0}, x_n \in \mathbb{R}; \sum_{n>0} x_n^2 < 1\}$*=ensemble des suites réelles de carré sommable. On considère l'application qui à* $x, y \in l^2$ *associe* $\langle x, y\rangle >= \sum_{n>0} x_n y_n$*. Ce nombre est bien défi (en effet,* $2|x_n y_n| \leq x_n^2 + y_n^2$ *donc la série est absolument convergente donc convergente). L'application* $\langle ., .\rangle >$ *est donc bien définie, symétrique, définie et positive : c'est un produit scalaire sur* l^2*. La norme induite est* $||x||_{l^2} = \sum_{n>0} x_n^2$ *et* l^2 *muni de cette norme est un espace complet, donc un espace de Hilbert.*

Exercice 10.0.16. *Une partie ouverte* U *d'un espace vectoriel normé* $(E, ||.||)$ *est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.*

correction : voir dernier chapitre. **Preuve**

1. On sait que : Connexité par arcs $\Rightarrow$ connexité
2. Réciproquement, soit U une partie connexe non vide et ouverte de E. Comme un espace vectoriel normé est un espace vectoriel toplogique alors à tout segment fermé $[a, b] = \{(1-t)a + tb; t \in [0, 1]\}$ de E ; on peut associer un chemin allant de a vers b en prenant l'application continue $\gamma : [0, 1] \to E : t \mapsto (1-t)a + tb$.

   Fixons $a \in A$ et considérons l'ensemble
   $V \overset{def}{=} \{b \in U/$ il existe un chemin de U joignant a et $b\}$.

   Par définition même, l'ensemble V est connexe par arcs. Reste à montrer que $V = U$.

   (a) V n'est pas vide car contient le point a.

   (b) L'ensemble V est ouvert. En effet, si $b \in V$, il existe un chemin de U allant de a vers b et, puisque U est ouvert, une boule non vide $B_o(b, r)$ incluse dans U. Pour tout point c de $B_o(b, r)$, le segment $[b, c]$ est inclus dans $B_o(b, r)$ donc dans U. Il existe donc un chemin de U allant de b vers c : Enfin, la réunion d'un chemin allant de a à b avec un chemin allant de b vers c est un chemin allant de a vers c : On conclut donc que $c \in V$, puis que $B_o(b,r) \subset V$.

(c) L'ensemble V est fermé. Soit $b \in \overline{V} \bigcap U$. Choisissons $r > 0$ tel que $B_o(b,r) \subset U$. Comme $b \in V$, l'ensemble $B_o(b,r) \bigcap V$ n'est pas vide et contient donc un point c. Par définition de l'ensemble V, il existe un chemin de U joignant a à c. Par ailleurs, le segment $[b,c]$ appartient à $B_o(b,r)$, donc est inclus dans U, et l'on en déduit finalement que $b \in V$. Par suite V est fermé

Comme V est non vide, ouvert et fermé du connexe U alors forcément $V = U$ et par suite U est connexe par arcs car V, l'est.

□

Exercice 10.0.17. *Soient* $A = \{(x, sin(1/x)) \subset \mathbb{R}^2 / 0 < x \leq 1\}$ *et* $F = \overline{A} \subset \mathbb{R}^2$

1. *Montrer que* $F = A \bigcup \{(0,y)/ -1 \leq y \leq 1\}$
2. *Montrer que* F *est connexe.*
3. *Montrer que* F *n'est pas connexe par arcs.*

Solution

1. Montrons que $F = A \bigcup \{(0,y)/ -1 \leq y \leq 1\}$.

   $F \subset A \bigcup \{(0,y)/ -1 \leq y \leq 1\}$? Soit $(x,y) \in F = \overline{A}$. Alors, il existe une suite $((x_n, y_n))_n$ de A qui converge vers (x,y). Si $x > 0$ alors $y_n = sin(1/x_n)$ converge vers $sin(1/x)$ (par continuité de sin, d'où $(x,y) \in A$. Dans le cas $x = 0$, on a $y_n = \sin(1/x_n)$, d'où $y_n \in [-1,1]$. Par conséquent, à la limite on a $y \in [-1,1]$. D'où $(x,y) \in \{0\} \times [-1,1]$.

   $A \bigcup \{(0,y)/ -1 \leq y \leq 1\} \subset F = \overline{A}$? Soit $(x,y) \in A \bigcup \{(0,y)/ -1 \leq y \leq 1\}$. Montrons qu'il existe une suite $((x_n, y_n))_n$ de A qui converge vers (x,y). Si $x > 0$, une telle suite existe trivialement (il suffit de prendre la suite constante égale à (x,y). On suppose donc $x = 0$. Ainsi $y \in [-1,1]$ est quelconque. Soit $z \geq 1$ tel que $\sin(z) = y$. Soit alors $x_n = 1/(z + 2\pi n)$. On aura $\sin(1/x_n) = \sin(z) = y$. Par conséquent la suite $(x_n, \sin(1/x_n))_n$ est une suite de A qui tend vers $(0,y)$ d'où l'inclusion recherchée.

2. Montrons que F est connexe.

Solution L'ensemble A est connexe dans R^2 comme image du connexe $]0,1]$ par l'application continue $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x)=(x,sin(1/x))$. $F=\overline{A}$ est connexe.

3. Montrons que F n'est pas connexe par arcs.

   Solution Par l'absurde, supposons F connexe par arcs. Alors, il existe $c:[0,1]\to F$ continue tel que $c(0)=(1,sin(1))$ et $c(1)=(0,0)$. Notons $c(t)=(x(t),y(t))$. Notons $T_0=\{t\in[0,1]/x(t)>0\}$. Cet ensemble est non vide puisque $0\in T_0$. On considère alors $t_0=\sup(T_0)$. Comme $x(1)=0$ alors $t_0<1$.

   Par l'absurde, supposons $x(t_0)>0$. Comme $t_0<1$, alors par continuité de la 1ere projection x de c, on aurait $x>0$ sur un ouvert $]a,b[\subset[0,1]$ contenant t_0, donc $l=\frac{b+t_0}{2}>t_0$ et $l\in T_0$ ce qui en contredit la définition de la borne supérieure.

   Par conséquent $x(t_0)=0$. Ainsi par continuité de x en t_0, on a : $\lim_{t\to t_0}x(t)=0$. Ainsi, il existe une suite $(\tau_n)_n$ qui tend en croissant vers t_0 telle que la suite $(x(\tau_n))_n$ tend en décroissant vers 0.

   Notons $c(t_0)=(x(t_0),y(t_0)=(0,y_0)$. Soit $y\in[-1,1]\backslash\{y_0\}$. Soit $z>0$ tel que $\sin(z)=y$. Pour tout n, il existe un entier k_n assez grand pour que $x_n:=\dfrac{1}{2\pi kn+z}<x(\tau_n)$. Comme $0=x(t_0)<x_n<x(\tau_n)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la 1ere projection x, il existe $t_n\in[\tau_n,t_0]$ tel que $x(t_n)=x_n$. On a alors $c(t_n)=(x_n,\sin(2\pi kn+z))=(x_n,y)$. Ainsi la suite t_n tend vers t_0 et $c(t_n)$ tend vers $(0,y)\neq c(t_0)$. Contradiction.

Exercice 10.0.18. *Soient $k:\mathcal{C}([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$ et (f_n) une suite bornée de $C([a,b],\mathbb{R})$, muni de la norme $||.||_\infty=||.||_u$.*

On définit $K:\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})\to\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ par $\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(Kf)(x)=\displaystyle\int_a^b k(x,t)f(t)dt$.

1. *Montrer que $A=\{Kf_n,n\in\mathbb{N}\}$ est équicontinue.*
2. *Montrer que $A=\{Kf_n,n\in\mathbb{N}\}$ est ponctuellemenet relativement compact.*
3. *Montrer que $(Kf_n)_n$ admet une suite extraite convergente dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.*

Solution

1. Soient $x,y\in[a,b]$. On a $|(Kf_n)(x)-(Kf_n)(y)|\leq\displaystyle\int_a^b|k(x,t)-k(y,t)|f_n(t)|dt$.

- k est continue sur le compact $[a, b] \times [a, b]$ donc est uniformément continue. Ansi, en particulier, $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \eta_{\varepsilon_1} / \forall x, y, t \in [a, b], |x - y| < \eta \Rightarrow |k(x, t) - k(y, t)| < \varepsilon_1$.

- (f_n) est une suite bornée de $C([a, b], \mathbb{R})$, muni de la norme $||.||_\infty$, alors il existe $M > 0$ tel que $\forall n >, ||f_n||_\infty < M$, et en particulier, $|f_n| < M$.

- Ansi, $\forall n > 0$, on a $|(Kf_n)(x) - (Kf_n)(y)| \leq \int_a^b |k(x, t) - k(y, t)|f_n(t)|dt \leq \varepsilon_1 M(b - a)$

- Soit $\varepsilon >$, en posant $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M(b - a)}$, on il existe η_ε, tel que $\forall n > 0, \forall x, y \in [a, b]$, $|(Kf_n)(x) - (Kf_n)(y)| \leq \varepsilon$.

- On conlut que $A = \{Kf_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.

2. On considère l'ensemble $A_x = \{g(x), g \in A\}$. Comme A est borné, alors A_x est boré dans $\mathbb{R}$, donc est relativement compact cést-à-dire $\overline{A}_x$ est compact. Donc, $A = \{Kf_n, n \in \mathbb{N}\}$ est ponctuellement relativement compact.

3. Comme A est équicontinue et ponctuellement relativement compact alors, A est relativement compact ce qui veut dire que $\overline{A}$ est compact, d'apres le theoreme d'Ascoli. Par suite, d'après la compacité dans les espaces métriques, A admet une suite extraite convergente dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

$\square$